

Комитет общего и профессионального образования
Ленинградской области

ГАОУ ДПО «Ленинградский областной институт развития
образования»

Факультет основного общего и среднего общего образования

Кафедра математики, информатики и ИКТ



Методическое сопровождение учителя математики современной школы: опыт Ленинградской области

Методическое пособие

Санкт-Петербург
2016

УДК 37
ББК 74.252
М 54

*Печатается по решению кафедры математики,
информатики и ИКТ и РИСа ЛОИРО*

Авторы: **С. А. Голубева, Ж. В. Громова, О. В. Ингинен,
Е. М. Крымцова, Е. Ю. Лукичева, В. П. Радченко, Е. В. Рязанова,
М. Ф. Титяк, С. Е. Федулов**

Под научной редакцией **Е. Ю. Лукичевой**

Рецензенты: **М. А. Горюнова**, канд. пед. наук, зав. кафедрой математики и ИТ (ЛОИРО);

Е. В. Смыкалова, канд. пед. наук, доцент кафедры физико-математического образования (СПб АППО)

Методическое сопровождение учителя математики современной школы: опыт Ленинградской области: метод. пособие / науч. ред. Е.Ю. Лукичева. – СПб.: ЛОИРО, 2016. – 119 с.

ISBN 978–5–91143–3–694–0

Представлены модели сопровождения педагогов, методические материалы и описание успешного опыта работы районных методических объединений, школьных методических объединений и учителей математики по актуальным проблемам образования: подготовка учащихся к государственной итоговой аттестации, содержание и организация работы в классах с углубленным изучением математики, вопросы частных методик обучения математике, конкурсы профессионального мастерства учителей математики и другие. Представленные разработки могут быть непосредственно внедрены в практику работы учителей математики.

Рекомендации, представленные в материалах, позволяют определить дальнейшие направления совершенствования методической работы с учителями математики.

Пособие адресовано методистам и учителям математики.

ISBN 978–5–91143–3–694–0

© Ленинградский областной институт
развития образования (ЛОИРО), 2016

Оглавление

Введение	4
Сопровождение учителя математики в постдипломном образовании: современный взгляд (<i>Е. Ю. Лукичева</i>).....	5
Государственная итоговая аттестация в Ленинградской области: сопровождение и результаты (<i>С. А. Голубева</i>).....	18
Система работы районного методического объединения учителей математики Лужского района по подготовке к ЕГЭ (<i>О. В. Ингинен</i>).....	33
Подготовка к ЕГЭ по математике: из опыта работы (<i>М. Ф. Титяк</i>).....	38
О системе работы по преподаванию математики в математических классах в МОУ «Лицей № 1» г. Всеволожска (<i>С. Е. Федулов, Е. М. Крымцова, Е. В. Рязанова</i>).....	49
Из опыта работы в классах с углубленным изучением математики (<i>Ж. В. Громова</i>).....	61
Функциональный метод в курсе математики средней школы и методика его использования при решении задач (<i>В. П. Радченко</i>).....	76
Профессиональный конкурс учителей математики «Информационно-компьютерные технологии в обучении математике» как ресурс повышения качества образования (<i>С. А. Голубева</i>).....	97
Урок математики и реализация ФГОС (<i>Е. Ю. Лукичева</i>).....	109
Заключение	118
Сведения об авторах	119

Введение

Система школьного математического образования проходит через те же изменения, что и вся система образования России. Пересматриваются и обновляются учебные планы и программы обучения, идет поиск новых подходов и технологий реализации учебного процесса в школе. Высокие требования в современных условиях предъявляются и к профессиональному уровню учителя математики. Ориентиром для современного учителя математики является «Концепция развития математического образования в РФ».

Как не потеряться в существующем многообразии программ, методов, инноваций? Как организовать свою работу в соответствии с новыми стандартами и требованиями? Как идти в ногу со временем, быть мобильным, гибким и преуспевающим в профессии? Современный учитель нуждается в поддержке и сопровождении на каждом этапе его профессионального пути, будь то молодой специалист или опытный учитель.

Профессиональный рост учителя предполагает организацию научно-методического сопровождения. Научно-методическое сопровождение профессионального роста учителя – это научно обоснованный способ взаимодействия сопровождающего (наставника, опытного специалиста, методиста) и сопровождаемого (учителя), направленный на непрерывное саморазвитие учителя в профессии, обусловленный количественными и качественными, содержательными и структурными преобразованиями личности учителя, что ведет к поступательному восхождению в профессии.

В пособие включены методические материалы, разработки и описание опыта работы и сопровождения учителей математики образовательных организаций Ленинградской области. Представленные материалы отражают, с одной стороны, сложившиеся и оправдавшие себя в теории и практике обучения математике в школе основные идеи и подходы, которые и в настоящее время не потеряли своей жизненной актуальности, с другой – инновационные направления, соответствующие тенденциям развития современного образования.

Сопровождение учителя математики в постдипломном образовании: современный взгляд

Практическая успешность педагога в профессии и его психологическое благополучие, обретаемое в процессе непрерывного профессионального образования и проявляющееся в осознании им целесообразности своей деятельности, выступают сегодня важнейшим результатом постдипломного образования.

Основным условием, способствующим формированию индивидуального стиля профессиональной деятельности, является гуманистический, творческий, позитивный, элективный и эмоционально комфортный характер образовательной среды, в которую вовлекается взрослый человек.

В современных условиях, пожалуй, не всегда важен путь приобретения знаний и умений: в рамках формального, неформального или информального образования важно, чтобы знания обеспечивали достаточно высокий уровень профессионального мастерства. Вместе с тем проблема современного педагога состоит в способности адекватно оценивать свою профессиональную компетентность: не редко самооценка педагога бывает чрезвычайно завышена, иногда – занижена. И только образовательная среда, которая характеризуется целенаправленным, системным, непрерывным, инновационным, преемственным и актуальным учебным процессом, выстроенным с учетом грамотного квалифицированного индивидуального *педагогического сопровождения*, позволяет педагогу объективно осуществлять оценку успешности своего профессионального и личностного развития. Создание подобной образовательной среды возможно только в структуре постдипломного образования.

В этой ситуации важным становится разработка содержания и технологий *педагогического сопровождения* учителя в постдипломном образовании.

При всем многообразии этимологии термина «сопровождение» педагогическое сопровождение, с одной стороны, несет в

себе черты социального взаимодействия субъектов образовательного процесса, с другой стороны, имеет свою специфику. Она заключается в педагогическом характере сопровождения, целью которого становится целенаправленное развитие личности сопровождаемого человека, осуществляемое посредством специальных педагогических систем (образования, просвещения, воспитания, обучения, подготовки) в их институциональном (структурном) оформлении.

На основе анализа педагогических исследований мы определяем *педагогическое сопровождение* как систему профессиональной деятельности преподавателя (андрагога), направленную на создание условий для успешного обучения, профессионально-личностного развития учителя в условиях постдипломного взаимодействия. Таким образом, под *педагогическим сопровождением* будем понимать комплекс превентивных, просветительских, обучающих, диагностических и коррекционных мероприятий, направленных на проектирование, обеспечение и реализацию условий для эффективного повышения квалификации учителя; перспектив его успешного профессионального и личностного развития. Педагогическое сопровождение характеризуется комплексностью, многопрофильностью, непрерывностью, имеет долговременную направленность. Еще одна чрезвычайно важная черта педагогического сопровождения – его персонифицированность, она определяет индивидуальный характер сопровождения каждого отдельного специалиста, моделируя такой путь саморазвития педагога, который ему наиболее удобен (по времени, объему, тематике, способам реализации и т. д.). Итак, обозначим виды педагогического сопровождения (по процедуре).

В организации сопровождения постдипломного образования учителя математики мы выделяем по содержанию следующие виды сопровождений: диагностическое, информационное, обучающее, методическое, научное, консультационное сопровождение (коучинговое сопровождение, консалтинговое сопровождение, тьюторское сопровождение), экспертное, организационное, сетевое, сервисное.

Характеристики	Виды педагогического сопровождения
→ По степени участия педагога	→ Непосредственное
	→ Опосредованное
→ По времени оказания	→ Опережающее
	→ Своевременное (оперативное)
→ По длительности	→ Единовременное
	→ Пролонгированное

Рис. 1. Виды педагогического сопровождения

Очевидно, что каждый из указанных видов сопровождений не является изолированным (или самостоятельным). Некоторые из них возникли в результате инновационных изменений (потребностей) в системе образования, в том числе изменений педагогического словаря: тьюторское сопровождение, коучинговое сопровождение, сервисное сопровождение и т. д. Ряд видов сопровождений пересекаются по содержанию и могут рассматриваться интегративно: научно-организационное, научно-методическое, информационно-методическое, информационно-сетевое и т. д.

Прокомментируем некоторые виды сопровождений.

Информационное сопровождение (ИС) – это обеспечение для педагогов доступа к информации, хранящейся в базах данных, базах знаний, в компьютерных архивах, справочниках и энциклопедиях, в том числе доступа к электронной информации, средствам Интернет в соответствии с их профессиональными потребностями. Информационное сопровождение образовательного процесса (ИСОП) представляет собой социально, педагогически и технически организованное взаимодействие субъектов как составную часть информационно-педагогической деятельности. Очевидно, что ИС напрямую связано с консультационным сопровождением, если услугу доступа к информации педагогу оказывает специалист системы постдипломного образования; если же информация добывается педагогом самостоятельно посредством организованной электронной базы дан-

ных, то в данном случае мы имеем дело с сетевым сопровождением (СС).

Методическое сопровождение (МС) рассматривается как комплекс методической работы, предполагающей взаимодействие сопровождаемого и сопровождающего; направлено на решение актуальных для педагога проблем профессиональной деятельности; осуществляется в процессах актуализации и диагностики существа конкретной проблемы, информационного поиска возможного пути решения этой проблемы, консультаций на этапе выбора пути, конструирования плана действий и первичной реализации плана. Его основной задачей является системное проектирование, дающее основания для развития всех субъектов системы образования.

Научное сопровождение (НС) чаще всего рассматривается как комплекс научной работы и все, что связано с ее проведением: научное кураторство, подготовка публикаций, научно-методическое обеспечение учебного процесса системы повышения квалификации, конференций, семинаров. К НС следует отнести подготовку научных сотрудников (аспирантов, докторантов) и сопровождение научно-методической работы образовательных учреждений.

Организационное сопровождение (ОС) педагога предполагает формирование баз данных, организацию и проведение разного рода конференций, семинаров, круглых столов. В этом смысле ОС неразрывно связано с НС и МС.

Под экспертным сопровождением (ЭС) будем понимать сопровождение деятельности эксперта, направленное на максимизацию результатов экспертируемой деятельности за счет оптимизации рисков и применения современных результативных технологий (логистики). Сюда необходимо отнести деятельность эксперта по экспертизе научно-методических материалов и документов, эксперта по аккредитации образовательных учреждений, эксперта по оценке качества образования. ЭС связано с МС и НС.

В свою очередь, выделенное нами обучающее сопровождение (ОС) педагога включает в себя методическое и научное сопровождение.

Под консультационным сопровождением (КС) профессионального развития педагога мы понимаем особый тип образовательной деятельности в системе постдипломного образования, направленный на решение чрезвычайно узкой профессиональной задачи, требующей срочного решения и актуальной в данное время и в данной педагогической ситуации. Профессиональное развитие педагога в процессе консультационного сопровождения обеспечивается благодаря технологии проектирования деятельностного содержания и его реализации в форме ситуационно-позиционного обучения. Сегодня, к сожалению, КС – средство разовой поддержки профессиональной деятельности педагога. Но в будущем КС может рассматриваться и как механизм «выращивания» педагога-профессионала.

Современная жизнь, заимствование терминов из английского языка сыграли свою роль и в обновлении педагогического глоссария. В КС могут быть выделены отдельные виды сопровождений.

Коучинговое сопровождение. Коучинг (coaching) – новый и для многих в нашей стране пока малоизвестный подход к развитию человека. Предтечей коучинга был профессор Гарвардского университета Тимоти Гелвей (Timothy Gallwey). Он определил коучинг как «технология раскрытия потенциала человека с целью максимального повышения его эффективности» [8]. В настоящее время коучинг переживает пик популярности за рубежом. Коучинг представляет собой форму консультативной поддержки, которая помогает человеку достигать значимых для него целей в оптимальное время путем мобилизации внутреннего потенциала, развития необходимых способностей и формирования новых навыков. Н.А. Зырянова отмечает, что «цель коучинга в обучении – помогать обучающимся учиться активно и сознательно, поддерживать намерение самостоятельно приобретать знания, способствовать тому, чтобы они могли максимально использовать свой потенциал, развивать навыки, лучше выполнять свои учебные обязанности и, в результате, достигать желаемых результатов» [2]. У учителя, реализующего основную образовательную программу, стандарт предполагает наличие

умения «обеспечивать условия для успешной деятельности, позитивной мотивации, а также самомотивирования обучающихся» [7]. Именно коучинг является наилучшим инструментом для реализации этих требований стандарта. Коучинг может считаться осуществленным только в том случае, если педагог приходит к осознанию необходимости учебной деятельности для достижения своих личных целей. Как пишут Э. Парслоу и М. Рэй, «вы не можете никого ничему научить, прежде чем человек сам этого не захочет; вы можете привести лошадь на водопой, но не в ваших силах заставить ее пить!» [6].

Еще один вид КС – консалтинговое сопровождение, в образовании эту категорию используют не очень часто. Во-первых, консалтинг – это процесс оказания консультационных услуг. Во-вторых, консалтинг – деятельность специальных организаций (в нашем случае это может быть структура постдипломного образования) по оказанию консультационных услуг другим организациям (образовательным учреждениям) или частным лицам. Консультирование может происходить в разных областях, к консалтингу также относится проведение маркетинговых и мониторинговых исследований, изучение ситуации в образовательном учреждении с последующим анализом и рекомендациями по улучшению. Формы консалтинга разнообразны, это могут быть индивидуальная консультация, семинар или тренинг.

И, пожалуй, последнее, выделенное нами, направление в КС – тьюторское сопровождение. Тьютор (tutor) в переводе с английского – педагог-наставник. Этимология этого слова (*лат. tueor* – заботиться, оберегать) связана с понятиями «защитник», «покровитель», «страж». Тьютор – это тот, кто сопровождает процесс освоения новой деятельности. В основе тьюторской работы лежит принцип индивидуализации, что и определяет все используемые тьютором приемы и способы. Главный инструмент обучения, воспитания и базовая функциональная обязанность педагога-тьютора – создание индивидуальной образовательной программы, которая постоянно уточняется и корректируется. Изменения вносятся в зависимости от совместного

анализа успехов и продвижений учащегося на пути освоения знаний.

В заключение следует упомянуть диагностическое сопровождение (ДС), которое мы используем на входе в организованную структуру (постдипломного образования) и при выходе из нее. Цель входного ДС – выработка индивидуального сопровождения педагога в постдипломном образовании, цель ДС на выходе – рефлексия, оценка, коррекция и разработка методических рекомендаций для последующего включения педагога в систему постдипломного образования.

Общая модель сопровождения педагога в постдипломном образовании представлена на схеме рис. 2. Безусловно, ее элемен-

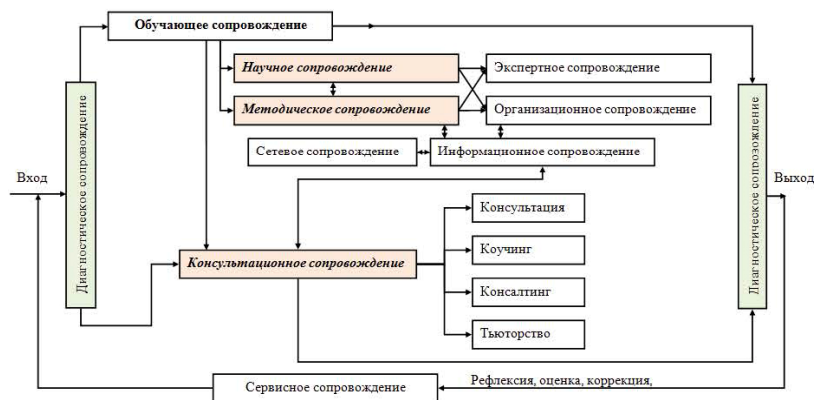


Рис. 2. Модель сопровождения педагога в постдипломном образовании

ты в соответствии с изменениями в системе образования постоянно подвергаются коррекции и уточняются. Функцией обучающего в модели сопровождения является оказание помощи обучающемуся в выявлении его опыта. Именно сопровождение (а не учение) выступает в данном случае основанием для организации деятельности со взрослыми, т. к. образование – это не простая передача знаний, а скорее отбор, анализ, синтез, открытие и диалог [3, 4]. Именно сопровождение, включающее в себя обучение, помощь и поддержку, предполагает не решение про-

блемы за педагога, а организацию и стимулирование его самостоятельности и создание условий для решения им своих проблем. Педагогическое сопровождение, реализуемое в структуре постдипломного образования, с учетом известных андрагогических принципов [1] в перспективе может быть определено как андрагогическое сопровождение.

Сопровождение деятельности педагога станет эффективным только при условии его системности, непрерывности и долгосрочности, т. е. должно действовать на протяжении всей профессиональной карьеры педагога.

Как, будучи сопровождающим взрослых, можно быть уверенным, что то, что мы предлагаем, полезно взрослому слушателю? Лучшим способом выяснить это является эффективный процесс оценки потребностей. Оценка потребностей позволяет определить, чему педагоги хотят научиться и что они уже знают. Оценка потребностей – это попытка услышать. Формируя содержание постдипломного образования учителя математики, важно помнить о запросах, с которыми педагоги приходят в учреждения дополнительного образования. Сегодня все заметнее потребности специалистов не только на повышение компетентности в профессиональной сфере, но и в личностно значимых областях. Схема рис. 3 дает представление о многообразии смыслов, которые пытаются найти педагоги, обратившиеся в систему постдипломного образования.

Обсуждая модель сопровождения, мы имеем в виду целостный интегративный комплекс основных закономерностей деятельности обучающегося и обучающего, содержание, источники, средства, формы и технологии обучения, а также методологические ориентиры, лежащие в основе взаимодействия такого вида (обучения взрослых).

С учетом андрагогического подхода к обучению взрослых сам творит свою образовательную ситуацию [1], т. е. черпает знания из тех областей, которые необходимы ему для самореализации. Лишь в этом случае происходит обогащение интеллектуального потенциала и эмоционально-волевой сферы, что приводит к качественным изменениям, позволяющим человеку по-новому взглянуть на себя и окружающий мир. Подобное развитие

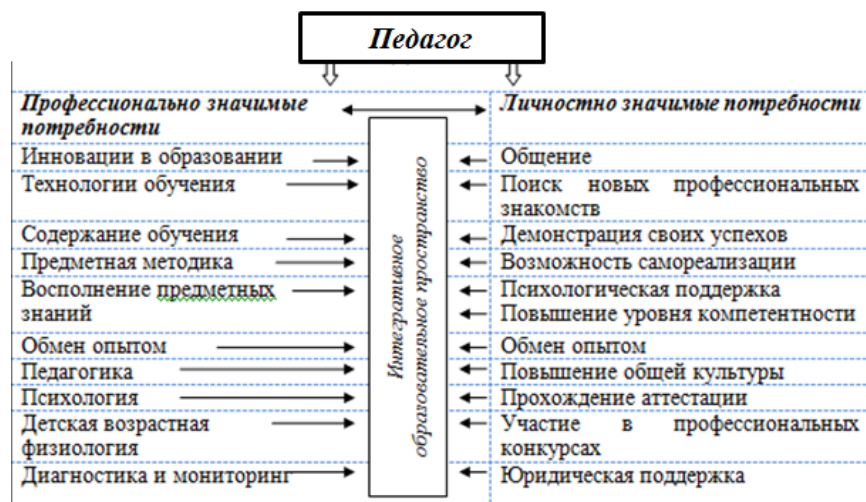


Рис. 3.

не происходит само собой. Если образование служит лишь средством, способом пассивного приспособления к условиям жизни, оно исчерпывает свои возможности по мере удовлетворения человеком своих конкретных потребностей. Поэтому чрезвычайно важным фактором выступает мотивация учения в той мере, в какой взрослый человек видит в знаниях важное средство решения широкого комплекса проблем – от значимых на конкретном отрезке жизненного пути до глубоких, «отложенных» во времени вопросов.

Есть смысл отметить необходимость разработки педагогической (человекоцентрической) модели сопровождения, ориентированной непосредственно на педагога (человека) [3, 4]. В этой модели должны быть учтены прошлый опыт организации обучения, преемственные связи, потребности современности (см. рис. 4).

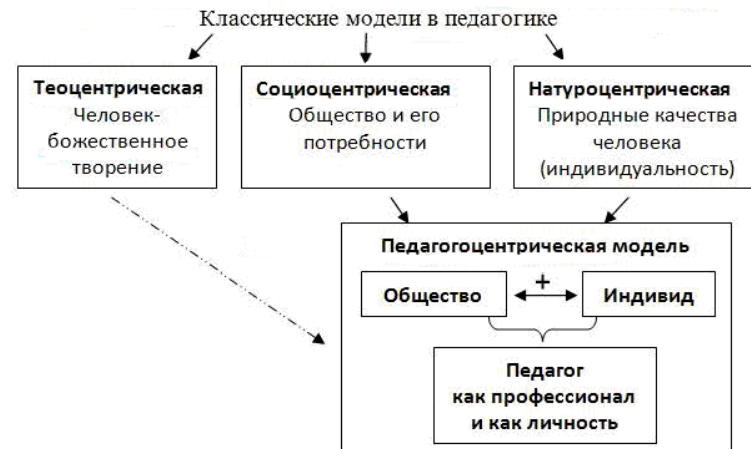


Рис. 4. Моделирование постдипломного образования педагога

На содержательном уровне нами рассматривается модель сопровождения учителя математики, состоящая из подмоделей:

- о Подмодель сопровождения учителя в условиях подготовки учащихся к ЕГЭ.
- о Подмодель сопровождения учителя в условиях подготовки учащихся к ОГЭ.
- о Подмодель сопровождения учителя в условиях введения ФГОС второго поколения.
- о Подмодель сопровождения учителя в условиях предпрофильной подготовки и профильного обучения.
- о Подмодель сопровождения учителя в условиях введения РСОКО (контроля предметной обученности).
- о Подмодель сопровождения учителя при прохождении аттестации.
- о Подмодель сопровождения учителя в профессиональных конкурсах.
- о Подмодель сопровождения учителя при работе с одаренными и талантливыми детьми.
- о Подмодель информационно-коммуникационного сопровождения обучения математике.

о Подмодель сопровождения профессиональной деятельности учителя.

о Подмодель сопровождения молодых и начинающих учителей.

о Подмодель сопровождения профессионально-личностного развития учителя.

Каждая подмодель может рассматриваться как самостоятельная модель сопровождения специалиста в рамках конкретного вопроса, а при необходимости (что чаще всего и случается) – как элемент вариативной модели сопровождения учителя, когда педагог самостоятельно выбирает тот спектр необходимых подмоделей, в которых нуждается на данный период профессиональной деятельности. В этой связи содержание и применяемые технологии каждой из подмоделей актуальны, своевременны, ставят своей целью оказание «скорой помощи» учителю при введении тех или иных новшеств в систему образования. Нередко, что естественно, подмодели взаимосвязаны, их содержание пересекается, что дает возможность педагогу включаться в любую подмодель практически на любом этапе ее реализации или в несколько подмоделей одновременно. Очевидно, что перечень подмоделей постоянно обновляется.

Для понимания потребностей учителей и создания эффективно действующей системы сопровождения ежегодно проводится анкетирование педагогов. Вот небольшой фрагмент из анализа этих анкет (можно было выбрать несколько вариантов ответа):

- Какие пути оказания помощи учителям по конкретной проблеме Вы видите:
 - только организация курсов на базе ЛОИРО – 14%;
 - организация проблемно-целевых и научно-методических семинаров – 55%;
 - организация круглых столов по изучению опыта других регионов – 7%;
 - организация круглых столов по обмену опытом в городе – 20%;
 - организация серии открытых уроков – 10%;

– создание общей системы сопровождения конкретной проблемы (например, ЕГЭ по математике: КПК, семинары, подготовка, планирование, диагностика, мониторинг) – 97%;

– проведение консультационных мероприятий – 82%;

– подготовка и проведение системы диагностических тестовых работ – 59%;

– самостоятельная подготовка – 17%.

Из ответов на вопросы анкеты видно, что учителя нуждаются в эффективной научно-методической поддержке, которая должна быть ориентирована на успех. Эта поддержка может давать не только образовательный эффект, но и психологический, особенно в сложных и подчас непонятных педагогу условиях введения новшеств. И если сложности «включения» учительства в проблемы ЕГЭ, ОГЭ, профильного обучения сегодня уже стоят не так остро, как два-три года назад (пожалуй, требуя лишь обновлений), то, например, ситуация с реализацией ФГОС второго поколения в основной школе чрезвычайно актуальна, безусловно, необходимые шаги в этом направлении уже сделаны [5]. Нельзя не отметить, что существуют вопросы, востребованные учителями на протяжении всей профессиональной карьеры (или в определенные ее периоды): работа с одаренными и талантливыми детьми, информационно-коммуникационное сопровождение обучения математике.

Особое внимание мы уделяем повышению имиджа учителя математики современной школы. В рамках этой деятельности разработано сопровождение профессионально-личностного развития учителя – система профессиональных конкурсов. Конкурсы являются для одних педагогов стартовой площадкой для демонстрации своих профессиональных возможностей, для других – результатом долголетних профессиональных изысканий и демонстрацией достигнутых успехов.

Таким образом, именно потребности учителей в постдипломном образовании выступают критериями отбора его содержания и технологий.

Только целенаправленный, системный, непрерывный, инновационный, преемственный и актуальный образовательный

процесс с учетом грамотно выстроенного квалифицированного индивидуального педагогического сопровождения позволяет осуществлять успешное профессиональное и личностное развитие педагога на этапе постдипломного образования.

Список литературы

1. *Вершиловский С.Г.* Непрерывное образование: Историко-теоретический анализ феномена : монография. – СПб.: СПб АППО, 2008.
2. *Зырянова Н.М.* Коучинг в обучении подростков // Вестник практической психологии образования. – 2004. – № 1. – С. 46–49.
3. *Лукичева Е.Ю.* Некоторые подходы к моделированию постдипломного образования учителя (на примере учителя математики) // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. № 8 (38). – СПб: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2007. – С. 161–171.
4. *Лукичева Е.Ю., Шаталов М.А.* Дополнительное профессиональное образование педагога: поиск современной модели / Е.Ю. Лукичева, М.А. Шаталов // Вестник ЛОИРО. – СПб.: ЛОИРО, 2010. – С. 74–80.
5. *Лукичева Е.Ю.* ФГОС: обновление содержания технологий обучения (математика) : учеб.-метод. пособие. – СПб.: СПб АППО, 2013.
6. Парслоу Э. Коучинг в обучении: практические методы и техники / Э. Парслоу, М. Рэй. – СПб.: Питер, 2003.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) образования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.rg.ru/2012/06/21/obrstandart-dok.html>
8. http://meta-coaching.com.ua/coaching_support/reality.html

Государственная итоговая аттестация в Ленинградской области: сопровождение и результаты

Обязательный государственный экзамен

Обязательный государственный экзамен в 2016 году сдавали 11111 выпускников. Необходимый минимум для получения удовлетворительной отметки по предмету был установлен на уровне региона – 8 баллов. При этом необходимо было в модуле «Алгебра» набрать 3 балла, в модуле «Геометрия» – 2 балла и в модуле «Реальная математика» – 2 балла. Еще один балл для прохождения необходимого минимума можно было набрать из любой части любого модуля. Максимальный балл за работу в 2016 году составлял 32 балла. Получили максимальный балл за работу 17 выпускников. В Ленинградской области средний балл составил 16,2, а средняя отметка – 3,73. Наибольшие затруднения у выпускников 9 классов вызвало задание № 3, связанное с понятием арифметического квадратного корня и пониманием того, что такое рациональные и иррациональные числа. В результате только 49% смогли правильно ответить на поставленный вопрос. Понятие арифметического квадратного корня недостаточно хорошо отрабатывается в основной школе и как результат – невысокий процент выполнения подобных заданий выпускниками на протяжении нескольких лет. Также эти задания вызывают серьезные затруднения и у выпускников 11 классов, сдающих профильный уровень единого государственного экзамена по математике. Особенно это проявилось в 2015 году, когда при решении тригонометрического уравнения, которое верно было сведено к квадратному, выпускники не смогли правильно вынести множитель из-под знака корня (около 11% допустили тогда эту ошибку) и, как следствие, получить даже 1 балл за решение данного двубалльного задания.

В модуле «Алгебра» серьезные трудности вызвало задание № 5, связанное с установлением соответствия между графиками изображенных функций и формулами, которые их задают.

Серьезные затруднения вызвало и задание № 6, связанное с понятием последовательности. Недостаточно отрабатывается в образовательных учреждениях рекуррентная формула числовой последовательности и, как результат, всего 44% верно справившихся. В течение многих лет данное задание выполнялось выпускниками очень успешно, и только в 2016 году процент решивших ее резко снизился.

Следует отметить, что наиболее успешно в 9 классе выполняется модуль «Реальная математика», немного хуже обстоят дела с модулем «Алгебра». Но самая удручающая ситуация складывается традиционно с модулем «Геометрия». Выполнение почти каждого задания из данного модуля в первой части едва достигает до 50%. Наиболее катастрофическая ситуация складывается с заданием № 13. В 2016 году верно выполнили его только 30% выпускников. Одна из причин такого результата – отсутствие теоретических знаний у учащихся. К сожалению, учителями не всегда уделяется достаточно времени изучению теорем, теоретическому опросу. Со стороны детей и их родителей зачастую можно услышать, что «у ребенка нет пространственного воображения», а развивать его нет желания.

Необходимо отметить, что неудовлетворительно обстоят дела с выполнением второй части экзаменационной работы в 9 классе. Около 72% выпускников в 2016 году не получили баллы за задания второй части или не приступили к ней. Так, с заданием № 21, где в основную волну было предложено решить уравнение $x^4 = (x - 6)^2$, смогли справиться всего 10% приступивших. Задание № 22 – текстовая задача на движение по реке. В 2016 году решалась с помощью дробно-рационального уравнения. Подобного плана задача может встретиться в № 12 единого государственного экзамена. Смогли верно выполнить ее всего 7% выпускников. Задание № 23 – традиционное, связанное с построением графика и ответом на вопрос. Полностью выполнить данное задание смогли 3% учащихся, а только построить график – 0,11%.

Задание № 24 – первое задание второй части модуля «Геометрия». Оно является самым простым из данного модуля и подразумевает не только запись окончательного ответа и изображения равных элементов на чертеже, а обязательного обоснования фактов, ссылок на используемые теоремы или свойства, записи решения. Справились с данной задачей только 5%.

Задание № 25 – более сложная задача на доказательство. В 2016 году она использовала применение признака подобия двух треугольников по двум сторонам и углу между ними. К данному заданию традиционно приступает незначительное количество выпускников. Так случилось и в этом году. Верно справились с ней только 2%. А ведь идея подобного задания, связанного с доказательством, вынесена в единый государственный экзамен (задача № 16 по планиметрии), а также в стереометрическую задачу (№ 14).

Задание № 26 – достаточно сложная расчетная задача по геометрии. Абсолютное большинство выпускников не успевает приступить к ней из-за нехватки времени. Ведь вторая часть требует не только записи ответа, но и решения. Поэтому справились с ней в 2016 году всего 1% учащихся. Однако данный показатель именно по данной задаче значительно выше, чем в предыдущие годы.

Действительно, хорошую отметку за экзамен по математике в 9 классе можно получить, если хорошо выполнить только тестовую часть. Однако каждому выпускнику, заканчивающему основную школу и собирающемуся в 10 класс, необходимо помнить о том, что успешная сдача экзамена на профильном уровне без хорошего понимания, как решить уравнение, рациональное неравенство, системы уравнений или неравенств, а также без хороших знаний планиметрии будет невозможна. Не понимая, как доказывать задачу по геометрии или как вычислять необходимые элементы многоугольника, выпускник в 11 классе на едином государственном экзамене не справится с геометрическими задачами по стереометрии и планиметрии во второй части. Затруднения вызовут задачи с геометрическим содержа-

нием уже и в первой части. А значит, рассчитывать на высокие баллы на профильном уровне в 11 классе не следует. Да и невозможно научиться решать задачи по геометрии только в старшей школе, если знания за основную школу отсутствуют. Решить данную проблему не помогут ни частные занятия с репетиторами, ни занятия на подготовительных курсах.

Единый государственный экзамен по математике (профильный уровень)

С 2015 года единый государственный экзамен по математике разделен на два уровня: базовый и профильный. Профильный уровень необходим тем выпускникам, которые в дальнейшем собираются продолжить свое обучение в высших учебных заведениях, где математика изучается по программам бакалавриата и специалитета. Выбор соответствующего уровня экзамена по математике – это глубоко осознанное действие, которое совершает учащийся в 11 классе. Количество участников ЕГЭ – выпускников 2016 года по математике в сравнении с 2015 годом (первый год сдачи ЕГЭ по математике по уровням) изменилось.

В 2015 году профильный уровень выбрали и сдавали 72% выпускников школ, математику базового уровня – 63%, в 2016 году профильный уровень – 60%, базовый уровень – 70%.

Изменение в текущем году связано с тем, что в школах качественнее проработана система выбора ЕГЭ по уровню (с выпускниками отрабатывалась персональная схема выбора вуза с определенными баллами и уровнем математики; с родителями и выпускниками в сентябре-октябре проведена усиленная информационная работа по пониманию выбора уровня математики) и была более ранняя подготовка к уровневому экзамену (репетиционный экзамен по базовому уровню проведен в декабре, по профилю – в середине января). По Ленинградской области получили следующие результаты:

Математика профильная	2014 г., %	2015 г., %	2016 г., %
Не преодолели минимального балла	0,41	8,23	9,81
Средний балл	48,14	51,1	49,71
Получили от 81 до 100 баллов	2,73	2,38	3,03
Получили 100 баллов	0	0	0,03

Региональный средний тестовый балл по математике профильного уровня по сравнению с 2015 годом в 2016 году снизился на 1,4 и составил 49,7. Также в 2016 году на 1,6% увеличилось количество не сдавших экзамен.

Доля высокобалльников выросла с 2,38 до 3,03%. В 2016 году получен один столбальный результат.

Основной процент участников, набравших балл ниже минимального, – категория выпускников прошлых лет (52% – более половины). Доля выпускников текущего года, не сдавших экзамен, составляет 7,3%. В 2015 году данный показатель равнялся 7,9%.

Категория выпускников текущего года получила лучшие результаты по показателям – доля участников, получивших от 61 до 80 баллов (33,1%, выше показателя ВПЛ в 4,3 раза), выше доля участников, получивших от 81 до 100 баллов (3,11% против 1,75%).

Однако в категории выпускников текущего года преобладающее большинство – 63,8% – набравшие от минимального балла до 60 баллов (уровень регионального тестового балла) и не сдавшие экзамен. Доля высокобалльников наименьшая по региону.

Обучающиеся лицеев и гимназий ненамного опережают иные категории по средним и высокобалльным результатам.

По сравнению с прошлым годом снизился тестовый балл по профильной математике как у городских, так и у сельских школ. Увеличился процент участников ЕГЭ из сельских школ, не сдавших профильную математику.

В КИМе профильного уровня сохранена преемственность с экзаменационной моделью прошлого года, а также уровень сложности заданий в частях с краткой записью ответа. В первую часть работы включены задания по всем основным разделам курса математики: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей. Данные задания были направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний.

С помощью заданий второй части осуществлялась проверка знаний математики на профильном уровне. Вторая часть состояла из четырех заданий с краткой записью ответа и семи заданий с развернутым ответом. Задания с подробным оформлением решения: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В задании № 1 проверяемые умения и навыки – анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера в повседневной жизни. Уровень сложности задания – базовый. Затруднение вызвал перевод 29 рублей 20 копеек в рубли. Выпускники записывали 29,20 и при умножении на 10 получали ответ 29,2. Проблему вызывает и то, что выпускники совершенно не осмысливают полученный результат. Справились 75% выпускников.

В задании № 2 у выпускников проверялись умения и навыки анализировать информацию, представленную на диаграмме. Уровень сложности задания – базовый. Необходимо указать наибольшую среднемесячную температуру с января по июнь, а в ответ записана температура июля, т. к. она в этом месяце выше. Невнимательно прочитано условие задачи. И как результат – справились всего 92% выпускников.

Задание № 3. Проверяемые умения и навыки – решать планиметрическую задачу на нахождение площади треугольника. Из представленного чертежа на клетчатой бумаге выпускник должен был определить длину высоты треугольника и сторону,

к которой эта высота проведена. Далее необходимо было верно применить формулу площади треугольника. А это как раз и вызвало затруднения. Традиционная ошибка в неверном применении формулы площади треугольника. Забывают про 0,5.

Еще один путь, который не привел к верному ответу, – построить до прямоугольника, найти его площадь, а затем вычитать площади прямоугольных треугольников. Но при вычислении площади прямоугольного треугольника опять допускается ошибка: отсутствует коэффициент 0,5. Поэтому смогли справиться с данным заданием всего лишь 64% выпускников.

В задании № 4 проверялось умение вычислять вероятность в простейшем случае. Уровень сложности задания – базовый. Невнимательное прочтение данной задачи, а также отсутствие осмысления полученного результата (вероятность получилась больше 1!) не позволили справиться с ней всем выпускникам. Проблему вызвал и перевод обыкновенной дроби в десятичную. Смогли получить верный ответ 82% выпускников.

В задании № 5 выпускникам предлагалось решить простейшее иррациональное уравнение. Уровень сложности задания – базовый. Не все выпускники возвели в квадрат правую часть уравнения. Задание было составлено таким образом, что если этого не сделать, то ответ получался в виде целого числа и легко записывался в бланк ответов № 1. Данный момент не остановил достаточно большое количество выпускников. Следующая проблема при выполнении данного задания – неверный перенос слагаемых из одной части равенства в другую, как результат – только 67% смогли добраться до верного ответа.

В задании № 6 проверялось умение решать планиметрическую задачу на нахождение длины стороны, знание свойства четырехугольника, описанного около окружности. Уровень сложности задания – базовый. Получили верный ответ всего 45% выпускников.

Задание № 7 – на геометрический смысл производной. У выпускников проверялось знание и понимание геометрического смысла производной, а также углового коэффициента прямой. Подобные задания выполняются очень плохо. Как пра-

вило, процент справившихся не превышает 30%. В 2016 году справились с задачей 29%. Столь невысокий показатель учителя объясняют отсутствием подобного рода заданий в учебниках. Однако в открытом банке заданий, а также в пособиях для подготовки к экзамену их присутствует достаточное количество. Начинать обучать решению этих задач необходимо уже при изучении данного материала, а закреплять – при повторении, когда идет непосредственная подготовка к экзамену.

В задании № 8 выпускники столкнулись с понятием пирамиды, ее основанием, высотой, а также формулой объема пирамиды. Проверялось умение решать стереометрическую задачу на нахождение объема пирамиды. Уровень сложности данного задания – базовый. Недостаточно хорошо учащиеся знают формулу объема пирамиды. Очень часто ошибка возникает из-за забывчивости умножить на $\frac{1}{3}$. Однако смогли правильно решить предложенную задачу только 15% выпускников.

Мы рассмотрели первую часть профильного уровня единого государственного экзамена по математике.

Задание № 9 было посвящено вычислению логарифмического выражения. Перед выпускниками стояла задача правильно заменить десятичную дробь обыкновенной, использовать определение степени с целым показателем, а затем, используя свойства логарифмов, выполнить преобразование логарифмического выражения. Получить верный ответ смогли лишь 41% учащихся.

В задании № 10 проверялось умение осуществлять практические расчеты по формулам, вычислять $\cos 19\pi$. Справились с заданием 29% выпускников.

Задание № 11. Текстовая задача с химическим содержанием. Данное задание повторило идею с 2014 года. К сожалению, не все выпускники владеют знаниями из области химии. Смогли верно выполнить 35%.

Задание № 12 – задание из математического анализа. Оно требует от выпускника умения верно найти производную функции, решить уравнение и определить стационарные точки, обязательно исследовать «знак» производной на координатной

прямой. Те выпускники, которые смогли верно продифференцировать данную функцию и определить стационарные точки, забыли исследовать производную. Как результат – неверный ответ. Дошли до получения верного ответа лишь 13% писавших работу.

Задания № 9, 10, 11, 12 – задания повышенного уровня сложности, но с краткой записью ответа.

Вторая часть с развернутым ответом проверяла умения выпускников не только получать правильный ответ, но и записывать решение.

Задание № 13 вызвало существенные затруднения у выпускников. В задании проверялись навыки решения квадратного, логарифмического, тригонометрического уравнений. Было предложено комбинированное уравнение. Под знаком логарифма присутствовала тригонометрическая функция. Решения выпускников показали, что у многих из них плохо сформировано понятие логарифма числа, что повлекло за собой указание области допустимых значений, которое в данном задании было необязательным. Так как решение тригонометрических неравенств в школах почти не рассматривается, то 41% выполнявших данный вариант неверно указали множество решений неравенства $\cos x > 0$. В некоторых работах это решение повлияло и на отбор серий корней. Также допущены ошибки и при решении уравнений $\log_2(2\cos x) = 2, \log_2(2\cos x) = \frac{1}{2}$, откуда получили $\cos x = 4, \cos x = \frac{1}{16}$.

5% ошибок допущено выпускниками при решении простейшего тригонометрического уравнения относительно косинуса. Хотя в прошлые годы такое уравнение не вызывало затруднений. Большая часть учащихся допускала ошибки при решении простейшего тригонометрического уравнения относительно синуса. 11% ошибок допущено при неверном указании значений обратных тригонометрических функций.

Проблему вызывает и нахождение корней в квадратном уравнении. 4% выпускников неверно решают квадратные уравнения из-за того, что неверно находят дискриминант.

В некоторых работах выпускники осуществляли неверный переход в простейшем логарифмическом уравнении (неверно использовано определение логарифма) и получали уравнения, например: 1) $\cos x = 4$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Первое уравнение абсолютно неверно, так как значение косинуса будет другое, хотя и больше единицы, а второе – правильное. Естественно, у эксперта возникал вопрос «что с этим делать?».

При выполнении пункта «б» также допускались ошибки при отборе с помощью тригонометрического круга. Указывалась верная дуга, подписывались ее концы, но корни обозначались неверно (3% работ).

Вычислительные ошибки отмечены в 7% работ.

В пункте «б» отбор корней с помощью неравенства повлек за собой большое количество вычислительных ошибок (2%).

Были работы, в которых пункт «б» выполнен необоснованно (1%).

В 2016 г. с данным заданием на 2 балла справились 22% выпускников, а в 2015-м на полный балл – 35%.

Задание № 14 по сравнению с предыдущими годами оказалось значительно сложнее в пункте «а», так как требовало уже расчета при доказательстве, что и повлияло на результаты.

23% выпускников, используя признак перпендикулярности прямой и плоскости, доказывали перпендикулярность только к одной прямой и делали неверный вывод о том, что прямая перпендикулярна к плоскости.

Пункт «б» не вызвал затруднения у тех, кто смог правильно указать расстояние от точки до плоскости.

При решении данной задачи в некоторых работах встречался координатно-векторный метод (пункт «а») (0,1%). Данный метод спровоцировал большое количество вычислительных ошибок. Всего справились с данной задачей 3% выпускников.

Задание № 15 – классическое. Для выпускников, умеющих выполнять подстановку, а также решать дробно-рациональные неравенства, данное задание не вызвало существенных затруднений. Однако многие выпускники очень плохо решают дробно-

рациональные неравенства. Основная проблема – отбрасывание знаменателя. Так поступили 7% выпускников, писавших данный вариант. Неверно раскрывали скобки 5%, ошибки в приведении подобных слагаемых – у 6%, вычислительные ошибки – у 3%, неверно считаны промежутки при решении неравенства методом интервалов – у 4%, перепутаны местами число, стоящее под знаком логарифма, и его основание – у 1%.

Верно справились с заданием 7% выпускников.

Задание № 16 по сравнению с прошлым годом оказалось проще. Наиболее успешно выполнялся пункт «б». Большая часть выпускников, справившихся с пунктом «а», использовали при доказательстве подобие треугольников. Однако не во всех работах верно использованы признаки подобия треугольников, что повлияло на снятие баллов за данный пункт. Не во всех работах выпускники делают достаточно обоснований. Не все выпускники, приступившие к данной задаче, смогли внимательно прочитать условие и сделать верный чертеж. Пункт «б» с использованием пункта «а» выполнялся лучше.

Справиться с данной задачей на полный балл смогли 1% выпускников, а в 2015 г. – 2%.

Задание № 17 вызвало затруднения при составлении модели. С подобными формулировками выпускники не встречались. Очень большой процент выпускников (20%) не поняли условия задачи и составили неверную модель. В некоторых работах давались очень краткие обоснования, что вызвало снижение баллов за задание. Вычислительные ошибки допустили 11% выпускников. Справились с задачей полностью 2% писавших работу в 2016 г., а в 2015 г. с похожим заданием верно справились 4% выпускников.

Задание № 18 очень хорошее по сравнению с предыдущими годами. Поскольку параметрам в образовательных учреждениях отводится крайне мало времени, то очень незначительное количество выпускников смогли написать что-то значимое в своих работах. Неверно использован алгоритм решения иррационального уравнения. Неверно сделали ограничения или вообще их не сделали 25% выпускников.

Неверно нашли корни в квадратном уравнении 3%. Нашли правильно корни, но не стали рассматривать условия совпадения корней 11%. Справились с заданием 1% выпускников.

Задание № 19 – традиционное. Пункты «а» и «б» не вызвали серьезных затруднений у тех, кто приступал к данному заданию. Не поняли условие данной задачи и привели из-за этого неверный пример 13%. Справились с заданием 2% выпускников.

Следует отметить, что после основной волны единого государственного экзамена на профильном уровне у многих его участников сложилось мнение, что предложенная работа имела запредельный уровень сложности. Однако все задания, которые были в ней предложены, полностью соответствуют программе профильного класса. Выпускникам не хватило умений и навыков, чтобы справиться с данными заданиями. Профильный уровень единого государственного экзамена по математике – экзамен по выбору. И если ученик всё-таки выбирает этот уровень, то для того, чтобы получить высокие баллы, он должен очень тщательно к нему готовиться, начиная с 8–9 класса, а не рассчитывать на везение.

Единый государственный экзамен (базовый уровень)

В данном варианте КИМа сохранена преемственность с экзаменационной моделью прошлого года, а также уровень сложности заданий. В работу включены задания базового уровня по всем основным предметным разделам: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теории вероятностей. Все задания направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях.

В базовом варианте наиболее успешно выпускниками Ленинградской области оказались выполнены задания с № 1 по № 14. Задания с № 1 по № 4 связаны с вычислениями. Абсолютное большинство выпускников обладает данными умениями. Задание № 5 связано с преобразованием выражения, содержа-

щего квадратные корни. Такого рода задания всегда вызывали затруднения у выпускников. Возможно, это связано с недостаточным количеством времени, отводимого на изучение данной темы в 8 классе.

Хуже всего выпускники выполняют задания, связанные с геометрическим содержанием. Из предложенных геометрических задач наиболее успешно выполнена задача № 13.

Хорошо справились выпускники с решением простейшей задачи на нахождение вероятности. Успешно выполняются задания, связанные с извлечением графической информации. Приступить к последним заданиям выпускникам не хватило времени.

Для улучшения ситуации на региональном уровне ежегодно проводятся курсы повышения квалификации, семинары для учителей математики и методистов, выездные семинары. На них проводится обсуждение всех ошибок выпускников, которые были выявлены при проверке работ, а также рекомендации по решению различных задач. Ежегодно в регионе проводятся пробные экзамены по математике на базовом и профильном уровнях. Также проводятся региональные диагностические контрольные работы в 5, 6, 7, 10 классах с обязательным обсуждением результатов.

Рекомендации по возможным направлениям совершенствования организации и методики обучения школьников

- Для успешной подготовки к итоговой аттестации в старших классах требуется целенаправленное повторение разделов курса алгебры 7–9 классов и математики 5–6 классов и систематический мониторинг продвижения отдельных учащихся по ликвидации пробелов за основную школу.

- Для обеспечения прочного овладения всеми выпускниками основными элементами содержания, изучаемыми в старшей школе не только на базовом, но и на повышенном уровне, необходимо проводить систематическое повторение пройденного. Это может осуществляться через систему упражнений для

домашней работы или использование в ходе обучения устных упражнений. Устные упражнения традиционно включаются в учебный процесс на уроках математики в основной школе, но недостаточно используются в старших классах. При разработке содержания и формы представления устных упражнений следует обеспечивать простоту технических преобразований и вычислений, необходимых для их выполнения. Это позволяет сосредоточить внимание учащихся на смысловой стороне их выполнения, т.е. на определении метода их решения. Кроме того, такого рода задания позволяют моделировать различные нестандартные ситуации применения знаний и умений учащихся.

- Изменение отношения к преподаванию курса геометрии в основной и старшей школах как к предмету, по которому предстоит государственный экзамен за курс средней школы. Учащиеся должны не только овладеть теоретическими фактами курса, но и уметь проводить обоснованные решения геометрических задач и математически грамотно их записывать.

- Отработка умений учащихся по применению полученных знаний должна осуществляться при решении прикладных математических задач.

- Осуществление систематического использования и отработка технологии тестирования при контроле знаний учащихся.

- Развитие и совершенствование использования учащимися математического языка.

- Обучение учащихся математическому моделированию, применению математических знаний анализу информации, поступающей в разных формах.

- Применение различных форм заданий с разнообразием формулировок, приучение учащихся к пониманию сути задания, которая может выражаться по-разному.

- Совершенствование методического инструментария, используя задачи не только как средство отработки технических приемов и алгоритмов, но и как средство формирования и развития интеллектуальных навыков учащихся.

- Выделение в учебном плане образовательных учреждений дополнительных учебных часов на обучение математике в

10–11 классах и консультативные мероприятия учителями математики, работающими в выпускных классах. В гимназиях и школах базовый уровень обучения математике в старшей школе желательно определять не менее чем пятью часами в неделю: 3 часа алгебры и 2 часа геометрии.

- Осуществлять не только натаскивание на решение типовых заданий открытого банка заданий ЕГЭ, а изучать математику. Рассматривать более сложные задачи.

- Администрациям школ необходимо осуществлять контроль за целевым использованием учебных часов, предусмотренных учебным планом образовательного учреждения, на обучение математике (не заменять уроки разного рода общественными мероприятиями, строго отслеживать посещаемость уроков учащимися).

- Мотивировать учителей, работающих в 9 и 11 классах, к качественной учебной работе, а также способствовать им в повышении квалификации в области технологии подготовки учащихся к ОГЭ и ЕГЭ по математике с участием в семинарах и вебинарах, обучающих курсах, проводимых на региональном уровне.

Система работы районного методического объединения учителей математики Лужского района по подготовке к ЕГЭ

На протяжении нескольких лет Лужский район демонстрирует стабильную положительную динамику как среднего балла ЕГЭ по математике, так и положения в рейтинге среди районов Ленинградской области. В 2016 году наши выпускники показали достаточно высокий результат по математике: средний балл по району составил 61,08. Достичь такого результата удалось главным образом благодаря выстроенной целостной и разносторонней системе работы районного методического объединения учителей математики по подготовке выпускников к итоговой аттестации.

Традиционно в районе проводятся диагностические работы, обсуждаются на заседаниях районного методического объединения их результаты, учителя разрабатывают индивидуальные образовательные маршруты для учащихся «группы риска» и т. д.

В данном разделе представлена система работы районного методического объединения и организация этой работы, показавшая свою эффективность.

В первую очередь был проведен тщательный анализ итогов ЕГЭ предыдущего года с целью найти причины неудачного результата и пути по повышению качества подготовки выпускников. В школы, которые не показывали положительной динамики по результатам диагностических работ, были осуществлены выезды с целью выявления причин низких результатов и оказания методической помощи на месте.

Проведя анализ и посетив школы, показавшие невысокие результаты, мы обнаружили, что у многих педагогов района нет четкой системы работы с выпускниками, не ведется мониторинг качества подготовки учащихся к ЕГЭ или он ведется формально, диагностические работы проводятся только для фиксации результата, без какого либо анализа со стороны учителя. Поэтому первоначально состоялось обучающее заседание РМО учителей

математики, на котором были представлены различные виды мониторинга, разъяснены их содержание, сущность и смысл проведения. Ведущие учителя района поделились опытом: какой они ведут мониторинг, каким образом они используют его в работе, как выстраивают систему подготовки по итогам диагностики. Было принято решение об обязательной разработке каждым учителем своей системы мониторинга, которая им будет удобна в работе, или использовании предложенной. В настоящее время все учителя Лужского района реализуют системный и комплексный мониторинг качества подготовки учащихся к ЕГЭ.

Результаты этой работы проявились уже в первый год в росте процента выполнения первой части ЕГЭ, что дало возможность Лужскому району подняться в рейтинге с десятого места сразу на третье.

Следующим этапом работы стала реализация задачи по сокращению разрыва между школами, показавшими высокий результат, и школами с невысоким средним баллом ЕГЭ.

Представляется, что для достижения этой цели обмен опытом на заседаниях РМО полезен, но малоэффективен. Работать с такими школами необходимо в индивидуальном порядке, проведя глубокий анализ причин отставания для каждой школы. Но осуществлять выезды во все эти школы, не ущемляя учебный процесс, затруднительно ввиду большой удаленности некоторых школ района от города, с одной стороны, и большой нагрузки руководителя РМО в своей школе – с другой.

Для решения поставленной задачи методическим центром было принято решение о создании экспертной группы, состоящей из учителей, имеющих большой опыт работы в выпускных классах. К каждому эксперту были прикреплены конкретные школы, имеющие проблемы в подготовке учащихся к итоговой аттестации и нуждающиеся в методическом сопровождении.

В этой связи следует отметить большую поддержку со стороны Комитета образования Лужского района, и в частности председателя Комитета Красий Светланы Викторовны. Она приветствует все наши начинания и оказывает всестороннюю помощь. Так, для поездок экспертов в отдаленные школы Коми-

тетом образования был выделен транспорт, что значительно облегчило реализацию данного проекта.

Каким образом выстраивалась работа экспертов, поясним на собственном опыте. Важным представляется провести работу очень деликатно, не задев самолюбия учителя, поэтому сначала учитель был приглашен к эксперту на урок, на элективный курс, проведено знакомство с мониторингом, который использует эксперт, с системой работы по подготовке 11-классников к итоговой аттестации. Только после этого были организованы посещения уроков учителя экспертом и проделана большая совместная работа: анализ причин низких результатов учащихся, выработка плана действий по организации работы с учащимися «группы риска», даны рекомендации по эффективности применения мониторинга достижений учащихся.

Реализация этого проекта также дала свои результаты. Школы, участвующие в проекте, заметно повысили результаты по математике, например, средний балл в СОШ № 4 повысился более чем на 13 баллов, в СОШ № 2 – почти на 10 баллов, а в Осьминской школе рост составил почти в два раза: с 27 до 50,50 балла. Таким образом, Лужский район по результатам ЕГЭ вышел на 2-е место в области.

Конечно, мы не собирались останавливаться на достигнутом. И, проведя анализ результатов, выяснили, что, показав хороший результат в выполнении первой части работы, выпускники Лужских школ отстают от ведущих районов области в выполнении заданий повышенного уровня сложности. В связи с этим перед нами встала задача поиска путей повышения качества подготовки учащихся в выполнении заданий второй части экзаменационной работы. С этой целью методическим объединением была разработана и внедрена инновационная программа работы с одаренными детьми. Одним из направлений этой программы является выявление наиболее мотивированных к обучению математике школьников в ходе проведения диагностических работ и дальнейшая работа с ними в рамках проведения семинаров-практикумов. Семинары проводятся в осенние и зимние каникулы на базе школы № 4 в течение трех дней, для

них составляется индивидуальное расписание: 3 пары по 1,5 часа в день. Участники делятся на 3 группы, учитывая уровень учебно-познавательной мотивации, а также их математических способностей. Ведущие учителя математики района на высоком методическом уровне проводят занятия по подготовке учащихся к решению заданий высокого уровня сложности и грамотному оформлению этих заданий. Обучающиеся, принявшие участие в семинарах, считают их интересными, познавательными и полезными. Первый опыт проведения подобных семинаров, безусловно, показал рост выполнения заданий второй части, но, к сожалению, не тот, который мы ожидали.

Проблема в том, что не все учителя готовы сами решать задания повышенного уровня сложности, ввиду чего работа с этими детьми оказалась фрагментарной и лишь в рамках проведенных семинаров, что, конечно, не может дать высокий результат. Поэтому в этом году принято решение об участии в семинарах вместе с выпускниками и учителей математики, работающих в 10–11 классах, а также молодых специалистов, одновременно с этим параллельно была организована серия семинаров для педагогов с целью повышения их математической подготовки – курсы повышения квалификации в рамках района.

Показателем эффективности этой работы служит тот факт, что учащиеся Лужского района сегодня показывают хорошие результаты в выполнении заданий повышенного уровня сложности. В 2016 году по сравнению с 2015 годом рост результативности выполнения заданий № 13, 15 и 17 составил соответственно 17, 18 и 21%. Рост выполнения второй части в целом по району составил 7% по сравнению с предыдущим годом.

Выстроенная в Лужском районе система сопровождения учителей математики по подготовке учащихся к государственной итоговой аттестации и реализованная совместно с председателем Комитета образования Красий Светланой Викторовной, информационно-методическим центром и учителями математики позволила нашим выпускникам достойно сдать выпускной экзамен и показать достаточно высокий результат.

Несмотря на то, что результаты предыдущих лет были успешными, ставим перед собой задачу и дальше совершенствовать работу районного методического объединения учителей математики с целью не просто сохранить достигнутый результат, но и попытаться превзойти его.

Если говорить о проблемах в работе РМО, то главная – это дефицит квалифицированных педагогических кадров, который приводит к большим нагрузкам действующих учителей, как следствие – отсутствие времени на организацию индивидуальной работы как с детьми «группы риска», так и с одаренными детьми, невозможность вести полноценную внеурочную деятельность, стимулировать развитие учащихся через привлечение их к творческим конкурсам. Проблема омоложения кадров стоит в районе тоже достаточно остро, её решение видится во «взращивании» своих кадров.

Еще одна проблема в повышении эффективности работы районного методического объединения – это большой процент сельских школ, территориально удаленных от города. Исходя из анализа проблемы, поставлена перспективная задача: создание сетевого сообщества учителей математики и учащихся 10–11 классов, работа которого будет направлена на системную подготовку к ЕГЭ на основе информационных (дистанционных) технологий.

Данный проект позволит: объединить усилия педагогов и учащихся района по подготовке к ЕГЭ; осуществлять открытый мониторинг и определять направления коррекционной работы по математике в каждой школе и с каждым учащимся; решить проблему взаимодействия педагогов, удаленных друг от друга школ, что минимизирует необходимость выезда.

Подготовка к ЕГЭ по математике: из опыта работы

Единый государственный экзамен по математике подразумевает решение двух главных задач: проверку обязательного уровня усвоения выпускниками школы курса математики и отбор учащихся для последующего обучения в высших учебных заведениях. Успешность выполнения заданий работы на экзамене обусловлена не только хорошими знаниями по предмету, но и правильной подготовкой к этому испытанию.

Экзамен не должен стать для выпускника испытанием на прочность нервной системы. Чем раньше начнется подготовка к нему, тем легче пройдет его сдача. Подготовка к экзамену – это не «натаскивание» выпускника на задания, аналогичные заданиям прошлых лет. Подготовка означает изучение программного материала с включением заданий в формах, используемых при итоговой аттестации. Кроме того, необходимо ликвидировать пробелы в знаниях и постараться решить общие проблемы, они хорошо известны каждому учителю: отсутствие культуры вычислений и несформированность приемов самопроверки. Таким образом, при подготовке к ЕГЭ по математике ставим перед собой следующие цели и задачи:

цели: обобщение и систематизация, расширение и углубление знаний по изучаемым темам; выявление и устранение пробелов в знаниях; приобретение практических навыков выполнения заданий, повышение математической подготовки школьников;

задачи: подготовить учащихся к итоговой аттестации в форме ЕГЭ; формировать навыки самостоятельной работы; формировать навыки работы со справочной литературой; формировать умения и навыки исследовательской деятельности; способствовать развитию алгоритмического мышления учащихся.

При планировании работы по подготовке к ГИА выделяют следующие направления:

1. Информационная деятельность

Сроки	Мероприятие
Сентябрь	Изучение демоверсии ЕГЭ (базовый и профильный уровень); цель – понять особенности заданий, которые будут предложены учащимся в этом году
Сентябрь	Формирование на основе подготовленного аналитического материала понимания у обучающихся специфики ЕГЭ
Сентябрь – октябрь	Провести оценку готовности учащихся к ЕГЭ, выявление проблем, типичных как для данного класса, так и индивидуально для каждого ученика; определение учащимися выбора сдачи ЕГЭ базового или профильного уровня
Сентябрь	Планирование работы по развитию навыков выполнения первой части экзаменационного задания
Сентябрь	Формирование справочного материала для подготовки к ЕГЭ
Сентябрь, январь	Ознакомление с литературой по подготовке к ЕГЭ
В течение года	Вести психологическую подготовку обучающихся к ЕГЭ, оказывать помощь в выработке индивидуального способа деятельности в процессе выполнения экзаменационных заданий
В течение года (многократно)	Ознакомление учащихся с правилами заполнения бланков ответов. Репетиция с учащимися по заполнению бланков регистрации и бланков ответов
В течение года	Знакомство учащихся с информацией по регламенту проведения ЕГЭ
В течение года	Проведение индивидуально-групповых занятий по математике
В течение года	Индивидуальная работа с учащимися группы I
В течение года	Индивидуальная работа с учащимися группы II
В течение года	Индивидуальная работа с учащимися группы III

Сроки	Мероприятие
В течение года	Информирование родителей учеников 11 класса по вопросам: 1) положение о ЕГЭ, правила и процедура проведения ЕГЭ; 2) документы ЕГЭ; пункт сдачи ЕГЭ; 3) своевременное информирование родителей о ходе подготовки к ЕГЭ; 4) результаты тренировочных, диагностических и репетиционных работ; график работ; 5) правило выставления итоговых оценок в аттестат; 6) порядок подачи апелляции; 7) результаты ЕГЭ 2015 г. по математике
В течение года	Оформление информационных стендов «Готовимся к ЕГЭ»

2. Определение групп выпускников с различным уровнем подготовки. Составление графика консультаций

В группу I попадают экзаменуемые, фактически не овладевшие математическими компетенциями, необходимыми в повседневной жизни, и допускающие значительное число ошибок в вычислениях, при чтении условия задачи.

В группу II входят участники экзамена, успешно освоившие курс математики полной (средней) школы на базовом уровне, но зачастую не имеющие мотивации для более углубленного изучения математики. В частности, выпускники, планирующие продолжение образования в сфере социально-гуманитарных наук, обычно распределяют свои усилия соответствующим образом.

Группа III – в основном будущие абитуриенты технических вузов. Отметим, что их число заметно меньше количества бюджетных мест по техническим специальностям.

№ п.п.	Ф. И. учащегося	Группа (I, II, III)	Время консультации

3. Организация повторения

На этом этапе необходимо разработать план подготовки к ЕГЭ, который должен включать в себя список ключевых тем для повторения. Это позволит параллельно с изучением нового материала системно повторить пройденное ранее, при планировании необходимо учитывать определение групп выпускников с различным уровнем подготовки. (Используемый материал из открытого банка заданий ФИПИ).

В зависимости от результатов, которые показывают учащиеся данного класса, план подготовки к ЕГЭ в течение учебного года может быть скорректирован.

План по организации повторения может содержать следующие направления:

- *Информационная деятельность*

Сроки	Мероприятия
Сентябрь	Входная диагностика знаний
Сентябрь	Выяснения причин отставания по предмету
Сентябрь – октябрь	Диагностическими процедурами выявить задания экзамена базового уровня, которые учащийся может выполнить
Сентябрь – октябрь	Составление индивидуальных маршрутов
В течение года	Введение диагностических карт учащихся
В течение года	Обучение способам преодоления тематических затруднений
В течение года	Ведение тетради по ликвидации пробелов в знаниях
Сентябрь	Составления графика консультаций для учащихся
В течение года	Мониторинг подготовки учащихся
В течение года	Индивидуальные консультации родителей и индивидуальное информирование

- *Тематическое повторение*

№	Дата	Проверяемые требования (умения)	№ задания КИМ
1			

- *Зачеты по сдаче теоретического материала за курс математики*

_____ (Ф. И. уч-ся)

Дата	Тема теоретического материала															

4. Мониторинг

Мониторинг по математике включает в себя не только диагностические работы в формате ЕГЭ, но и регулярные срезы знаний. Основная цель подобных работ – оперативное получение информации о качестве усвоения определенных тем, анализ типичных ошибок и организация индивидуальной работы с учащимися по устранению пробелов в знаниях.

Информированность родителей о результатах таких работ и срезов благоприятно скажется на дальнейшем процессе обучения. Диагностические работы проводятся по материалам района, системы Statgrad, пособий по подготовке к ЕГЭ.

Сроки	Диагностическая работа
Сентябрь	По материалам администрации школы
Октябрь	Муниципальная контрольная работа
Ноябрь	По материалам учителя
Декабрь	Муниципальная контрольная работа
Январь	По материалам учителя
Февраль	Пробный экзамен
Март	Диагностическая работа системы statgrad
Апрель	Муниципальная контрольная работа
Май	Диагностическая работа системы statgrad

Результаты диагностических работ отражаются в диагностических картах на каждого обучающегося.

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
Диагностическая карта подготовки к ЕГЭ по математике
ученика (-цы) 11 класса
МКОУ «Фёдоровская средняя общеобразовательная школа»
 _____ (Ф.И.О. уч-ся)

	Дата (проведения ДР)	Часть 1										Часть 2					Итоги		Тестовый балл	Подпись родителей
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17		

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ
Диагностическая карта подготовки к ЕГЭ по математике
ученика (-цы) 11 класса
МКОУ «Фёдоровская средняя общеобразовательная школа»
 _____ (Ф.И.О. уч-ся)

Дата (проведения ДР)	Задание																				Итоги		Оценка	Подпись родителей
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Итоги	%		

Индивидуальную диагностическую карту каждый учащийся ведет самостоятельно, знакомя родителей с результатами диагностических работ под подпись. Учитель контролирует ведение диагностических карт, направляет обучающихся к самоанализу типичных ошибок. По результатам нескольких работ, можно спрогнозировать предварительный тестовый балл, тем самым скорректировать мотивацию у выпускника.

Учитель результаты всех проведенных работ отражает в диагностической карте по всему классу. Это позволит выделить типичные ошибки, спрогнозировать первичный балл, провести

корректировку плана по подготовке к ЕГЭ, разработать индивидуальные маршруты для учащихся, вести целенаправленную работу с их родителями.

Диагностическая карта подготовки к ЕГЭ по математике
учащихся 11 класса
МКОУ «Фёдоровская средняя общеобразовательная школа»

№	Ф.И. уч-ся	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Итого	%	Прохождение, мин
1																		
2																		
	ИТОГО																	
	% выполнения																	

Диагностическая карта подготовки к ЕГЭ по математике
учащихся 11 класса
МКОУ «Фёдоровская средняя общеобразовательная школа»

№ п/п	Ф.И. уч-ся	Дата написания работы				Динамика

В результате ведения диагностических карт можно вести мониторинг типичных ошибок, на основании которого проводить корректировку плана по подготовке к ЕГЭ.

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике	№ задания	Дата проведения диагностической работы							
		% выполнения заданий по классу							
Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической дея-	1								

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике	№ задания	Дата проведения диагностической работы							
		% выполнения заданий по классу							
тельности и повседневной жизни									
Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках	2								
Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах	3								
Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)	4								
Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий	5								
Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы	6								
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать постро-	7								

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике	№ задания	Дата проведения диагностической работы							
		% выполнения заданий по классу							
енные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин									
Вычислить производные и первообразные элементарных функций; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции	8								
Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	9								
Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма. Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования. Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных	10								

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по математике	№ задания	Дата проведения диагностической работы							
		% выполнения заданий по классу							
выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции									
Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах	11								
Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы	12								
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры (текстовые задачи)	13								
Вычислять производные и первообразные элементарных функций; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции	14								

5. Использование ИКТ при подготовке к ЕГЭ

• Наряду с сайтом www.mioo.ru полезно использовать www.uztest.ru, который дает возможность составлять дифференцированные домашние задания (в результате учащиеся не могут списывать друг у друга или пользоваться решебниками), обеспечивает обратную связь между учителем и учеником через форум, позволяет следить за процессом выполнения работы и выявлять пробелы. Следует приучать учащихся к самостоятельной работе дома, выполнять тренировочные работы в режиме онлайн, используя адреса сайтов, предложенных учителем.

• Дает положительный результат организация дистанционного обучения по подготовке к ЕГЭ по математике на платформе webct.lengu.ru.

• Важно обучить учащихся работе с открытым банком заданий ФИПИ.

6. Папка учащегося по подготовке к ЕГЭ

Папка может содержать следующие разделы: теоретический справочник, индивидуальная диагностическая карта, разбор заданий с типичными ошибками, мониторинг сдачи теоретического материала, диагностические работы, подборка заданий части В и части С, инструкция по работе с бланками (бланки № 1 и № 2, дополнительный бланк), график консультаций, индивидуальный образовательный маршрут, список пособий и интернет-ресурсов.

7. Психологическая готовность выпускников к итоговой аттестации должна быть направлена на внутреннюю настроенность на определенное поведение, ориентированность на целесообразные действия, актуализацию и использование возможностей для успешных действий в ситуации сдачи экзаменов.

О системе работы по преподаванию математики в математических классах в МОУ «Лицей № 1» г. Всеволожска

Основная задача обучения математике в школе заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования. Безусловно, решению этой задачи в наибольшей степени способствует реализация программы углубленного изучения математики. Наряду с решением основной задачи математического образования углубленное изучение математики предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой, подготовку к обучению в ВУЗе.

Начальный этап углубленного изучения математики (8класс) является в значительной степени ориентированным. На этом этапе ученику надо помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им, с тем чтобы по окончании 9 класса он смог сделать осознанный выбор в пользу углубленного либо базового уровня изучения математики. Интерес и склонность учащегося к математике должны постоянно подкрепляться и развиваться.

Последующее углубленное изучение математики, на втором этапе, предполагает наличие у учащихся устойчивого интереса к математике с последующим выбором профессии, связанной с математической областью, требующей достаточно высокой математической культуры.

Историческая справка

Первый математический класс во Всеволожском районе появился именно в лицее в 1987 году (в то время Всеволожская средняя школа №1). Предложил его создать Олег Васильевич Симонов, заведующий кабинетом математики ЛОИРО, а поддержал его идею заведующий Всеволожским ГОРОНО Анатолий Васильевич Войтов. Этот первый математический класс выпускала Елена Михайловна Крымцова, заслуженный учитель РФ, которая до сих пор преподает в профильных математических классах лицея.

У истоков математического профиля лицея стояли Крымцова Елена Михайловна, Каменецкая Любовь Марковна, Федулов Сергей Евгеньевич, создавшие авторскую программу углубленного изучения математики.

В 1988 году математико-механический факультет СПбГУ предложил областному комитету образования сотрудничество в работе с одаренными детьми, и инспектор Татьяна Ивановна Паришина познакомила коллектив школы с профессором Алексеем Алексеевичем Никитиным, который оказал нашей школе огромную помощь при составлении программы математико-механического факультета и классов с углубленным изучением математики. Был составлен договор, и лицей был включен в программу «Школа – ВУЗ». Наши ученики в течение года писали контрольные работы, присылаемые из СПбГУ, а в июне выпускники сдавали экзамен, по результатам которого могли быть зачислены на математико-механический факультет ВУЗа. Курировал эту деятельность председатель школьного совета математико-механического факультета Олег Александрович Иванов, автор известных книг по математике для школьников. Среди учителей, сотрудничавших с СПбГУ, был уникальный человек, заслуженный учитель РФ Борис Германович Зив, у которого более десяти лет учились учителя нашей школы в составе группы учителей Всеволожского района, за что мы ему бесконечно благодарны.

Система учебной работы по программе углубленного изучения предмета имеет ряд особенностей по сравнению с работой по базовой программе. Это касается многих компонентов учебного процесса. Хотелось бы отметить некоторые из них, имеющие место в МОУ «Лицей № 1» г. Всеволожска, реализующем программу углубленного изучения математики.

Прежде всего это касается **учебных материалов**. По нашему мнению, так и не появился, к сожалению, учебник по программе углубленного изучения математики, удовлетворяющий в полном объеме ее успешной реализации. В своей работе мы используем УМК под редакцией Н.Я. Виленкина. При этом к изучению математики в математических классах привлекается и другая учебная литература: учебники для массовой школы, экспериментальные учебные пособия, различные сборники задач, книги, освещающие опыт преподавания в математических классах и содержащие материалы обучения, брошюры Северо-Западной ЗМПШ: «Графы», «Игры», «Комбинаторика и вероятность», «Кусочно-линейные функции», «Наибольшее и наименьшее значение функции», «Тригонометрия» и другие. Используем интересные и полезные материалы журналов «Математика в школе», «Квант», «Математика. 1 сентября», а также материалы, разработанные учителями, работающими в данных классах лицея.

Программа углубленного изучения математики требует **особых методов обучения и контроля**. Необходим определенный подход к обучению математике. Прежде всего это интенсивная работа на уроках, большой объем самостоятельной работы учеников, а также использование некоторых вузовских методов преподавания, например, лекционно-зачетной системы. Применение таких методов обучения в математических классах должно сформировать у обучающихся особый тип мышления. В первую очередь это умение сформулировать идею и спланировать её реализацию на несколько шагов вперед. Важно также умение систематизировать знания – от частного к общему и от общего к частному. Эти качества помогают не только быть успешными в школьной программе, но и становиться победителями и призерами олимпиад различного уровня, в дальнейшем

максимально реализовав свои способности при обучении в ВУЗах.

Систематическая **самостоятельная работа** – доминирующая черта при обучении в классах математического профиля. Формы ее организации в нашем лицее самые разнообразные: изучение определенных разделов учебника на уроке или в качестве домашнего задания с последующим выполнением заданий по рассмотренному самостоятельно материалу, подбор упражнений по заданной теме, составление заданий по определенному теоретическому материалу, подготовка сообщений (например, с доказательствами теорем по дополнительной литературе, указанной учителем), защита проектов и т. д. При руководстве самостоятельной работой учащихся мы стараемся помочь им в рациональной организации своего труда, привить навык глубокого осмысления заданий.

Наши ученики успешно выступают со своими исследованиями на районных межшкольных научно-практических конференциях, показывая высокий уровень математических знаний, математического и логического мышления.

При обучении математике в математических классах старшей ступени активно используется **лекционно-зачетная форма** изучения учебного материала, которая дополняется семинарскими занятиями. Это связано с тем, что некоторые разделы курса математики содержат большой объем теоретического материала, без изучения которого невозможно выполнять практическую часть. Такая организация обучения позволяет подготовить учеников к успешной адаптации к системе обучения в ВУЗах. В нашем лицее практикуется курс лекций по теории делимости чисел, по комбинаторике и вероятности, по применению производной к исследованию функции и т. п. После лекционного изложения теории проводится серия уроков-практикумов, требующих знания теоретического материала и умения выбрать из него те теоремы, определения, свойства, которые необходимы для решения конкретных задач. Итогом работы являются зачет (как в устной, так и в письменной форме) и контрольная работа.

Например, к зачету по теме «**Подобные треугольники**» в 8 классе учащимся предлагаются следующие вопросы:

- Когда отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 ?
 - Определение подобных треугольников.
 - Отношение периметров подобных треугольников.
 - Теорема об отношении площадей подобных треугольников (доказательство).
 - Признаки подобия треугольников (доказательство одного из них).
 - Свойство медиан треугольника (доказательство через центр масс).
 - Свойство биссектрисы треугольника (доказательство).
 - Обобщённая теорема Фалеса (доказательство с использованием площадей треугольников).
 - Свойство высоты прямоугольного треугольника (доказательство).
 - Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.
 - Теорема Чевы (доказательство).
 - Теорема Менелая.
 - Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника.
 - Основное тригонометрическое тождество. Выражение тангенса через синус и косинус.
 - Значения тригонометрических функций углов 30° , 45° и 60° .
- Примеры задач, предлагаемых по этой теме в практической части зачёта:

Вариант 1

№1

Найти две стороны треугольника, если их сумма равна 91 см, а биссектриса, проведенная к третьей стороне, делит эту сторону в отношении 5:8.

№2

Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислите площади образовавшихся треугольников.

Вариант 2

№1

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c , а острый угол – α . Выразите периметр треугольника через c и α .

№2

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $AM:MB=2:3$, $BN:NC=2:1$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O . Найти отношение $CO:OM$.

Вариант 3

№1

В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки 20 см и 15 см. Найдите периметр этого треугольника.

№2

В треугольник AFK вписан ромб $ABCD$ так, что угол A у них общий, а вершина C принадлежит стороне FK . Найти сторону ромба, если $AF=21$ см, $AK=24$ см.

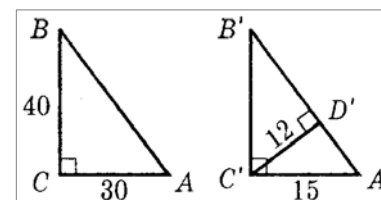
Вариант 4

№1

Прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, площадь которого в 8 раз меньше площади оставшейся части. Периметр большего треугольника равен 27. Найдите периметр меньшего треугольника.

№2

Подобны ли прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$?



При работе в математических классах важен **дифференцированный подход** к обучению. Ученики различаются по своим способностям и интересам, следовательно, для успешности обучения необходимо обеспечить каждому ученику нагрузку, соответствующую его индивидуальным возможностям. Этого мы достигаем различными методами обучения: дифференцированными домашними заданиями, разноуровневыми контрольными

и самостоятельными работами, индивидуальными заданиями. Этой же цели служит индивидуализированный контроль. При всем разнообразии форм дифференциации, которые используются при обучении в математических классах, ее основой является различие в тех заданиях, которые выходят за пределы обязательного минимума. Проблема дифференцированного подхода к ученикам в математических классах в данный момент как никогда важна для нас, так как связана с возможностями комплектования этих классов только, как правило, из учеников нашего лицея.

Важным аспектом в работе в математических классах является вопрос **контроля за усвоением знаний**. Методика проведения текущего контроля, проверочных, самостоятельных и контрольных работ имеет много общего с аналогичной работой в общеобразовательных классах. При проведении контрольных работ мы используем рекомендованные Министерством образования и науки РФ дидактические материалы. При этом учителя могут вносить изменения или дополнения с учетом конкретных условий. Для наиболее одаренных в области математики учеников мы включаем в контрольные работы один-два дополнительных задания повышенной сложности, которые могут быть оценены дополнительной отметкой. Для контроля усвоения больших разделов учебного материала учителя лицея практикуют проведение тематических зачетов. Основное требование к ним связано с необходимостью совмещения контроля и обучающих функций. На зачеты могут быть вынесены избранные теоретические вопросы, наиболее характерные для данной темы, задачи из основного курса и дополнительные задания. При этом всему классу могут быть предложены многовариантные задания одинаковой сложности или задания с учетом способностей учащихся. Теоретическая часть зачёта часто принимается тьюторами-старшеклассниками. Таким образом выстраивается вертикаль, при которой старшеклассники принимают участие в математическом образовании младших школьников.

Невозможно представить работу по качественному освоению углубленного курса математики без использования **проблемных методов** обучения, что позволяет раскрыть общие законы, используемые в науке, и математике в частности, показать пути поиска и решения различных проблем, поставить новые задачи, обсудить методы их решения. Проблемное изложение и изучение вопросов математики является неотъемлемой чертой работы учителей лицея в математических классах. Проблемное обучение используется и при отработке алгоритмов решения задач. Например, при отработке умения находить наибольшее (наименьшее) значение функции перед учениками ставится проблема наиболее рационального способа выполнения задания.

Каждому заданию сопоставьте возможные рациональные способы его решения:

Задания	Способы решения
1) $f(x) = 2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 9}$	А) Использование свойств функции
2) $f(x) = 12\sin\frac{x}{2} - 5\cos\frac{x}{2} + 4$	Б) Использование графиков функций
3) $f(x) = \frac{4}{x} + 8x$ на $(0; +\infty)$	В) Замена исследуемой функции на функцию от новой переменной
4) $f(x) = \sqrt{ 4-x } + \frac{36}{\sqrt{ x-4 }}$	Г) Применение неравенств (оценка)
5) $f(x) = x(12-x)$ на $(0; 12)$	Д) Применение теорем
6) $f(x) = 2\cos 2x - 2\cos x$ на $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$	Е) Использование свойств обратной функции
7) $f(x) = x-1 + x-2 + x-3 - x-4 $	Ж) Нахождение множества значений функции
8) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$	З) Использование производной функции
9) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 4$ на $[-1; 2]$	
10) $f(x) = 5^{-x^2+4x-2}$	

Преподавание курса углубленного изучения математики в наибольшей степени способствует развитию у учеников **внутрипредметных и межпредметных** связей. Решение этой проблемы крайне актуально в рамках реализации ФГОС второго поколения, направленных на формирование метапредметных умений и навыков. В преподавании математики по программе ее углубленного изучения учителя лицея прежде всего делают акцент на развитие межпредметных связей с такими предметами, как физика, химия, экономика. Эта работа способствует становлению компетентностной личности выпускников лицея, их успешности при сдаче ЕГЭ по математике и поступлению в ВУЗы.

В классе с углубленным изучением математики наиболее полно можно осуществить переход от учения как функции запоминания к учению как процессу умственного развития, позволяющему использовать усвоенные знания. Этому способствуют противоречия, возникающие между проблемами, ставящимися перед учениками, и их знаниями. И, конечно же, необходимо максимально поддерживать интерес к учебному предмету, который формируется прежде всего на уроках математики. Учителя нашей школы при изучении нового материала часто используют идею решения, а в дальнейшем и распознавания «ключевых задач (упражнений)». Наиболее одаренные ученики могут получить задание на их составление. На уроках решения нестандартных задач часто используется метод «мозгового штурма», при этом организуется работа в группах. В 8–9-классах, когда ученики еще проверяют на прочность свой интерес к изучению углубленного курса математики, учителя в практике работы на уроках используют и игровые технологии.

Важной составляющей в обучении учеников по программе углубленного изучения математики является использование возможностей **дополнительного образования**. Эти возможности реализуются через постоянное взаимодействие с организациями дополнительного образования и через участие в разовых мероприятиях, проводимых ими.

Огромную многолетнюю помощь развитию математических способностей учеников лицея оказывает Северо-Западная

заочная математическая школа. Первой в нашей школе начала сотрудничать с ЗМШ Любовь Марковна Каменецкая.

Программа ЗМШ крайне разнообразна и интересна. Она предусматривает обучение решению как программных задач повышенного уровня сложности, так и олимпиадных задач, способствует подготовке учеников к обучению в ВУЗах. В заочной математической школе уже много лет работают интересные, преданные своему делу люди, которые с огромным уважением относятся к учителям и ученикам. Это бессменный директор ЗМШ Владимир Михайлович Гольховой, преподаватели Галина Васильевна Шалугина, Константин Эммануилович Воеводский.

Большой интерес у учеников математических классов нашей школы вызывают Слёты юных любителей науки, где читают лекции ведущие математики Санкт-Петербурга, для участников проводятся командные олимпиады и другие конкурсы. Каждая команда готовит к Слёту научный доклад, требующий изучения дополнительной математической литературы. Наше неоднократное участие в Слетах юных любителей науки ознаменовано многочисленными победами в устных и письменных олимпиадах, конкурсах докладов по предложенной научной теме. Сейчас в нашей школе в работе с ЗМШ в группе «Коллективный ученик» принимают участие учителя: Сергей Евгеньевич Федулов, Елена Михайловна Крымцова, Майя Владимировна Метлицкая, Ольга Степановна Малахова вместе со своими учениками математических 8–11 классов. Наиболее одаренные в области математики ученики лицея уже много лет пополняют свой багаж знаний и развивают свои математические способности через учебные сессии по математике в ГБУ ДО Центр «Интеллект».

Способствует повышению уровня подготовки по математике учеников математических классов нашей школы под руководством Рязановой Елены Владимировны их участие в очных семинарах «Математика – это просто!», проводимых в рамках школы «УниШанс» преподавателями и аспирантами СПбГУ и Академии педагогического мастерства. В практику лицея входит приглашение преподавателей школы «УниШанс» для чте-

ния популярных лекций по вопросам математики для учеников математических классов.

Важный аспект успешной работы в математических классах – пропедевтика математического образования в 5–7-классах. Этому способствуют проводимые ежегодно в лицее различные мероприятия в рамках Декады математики, математическая игра «Кенгуру».

Уже около 20 лет творческая группа учителей математики проводит в разных городах Ленинградской области для школьников учебные сборы по математике. В этих сборах принимают участие как ученики, так и их учителя. Во время проведения этих сборов происходит обмен знаниями и опытом работы, проводятся олимпиады и математические конкурсы: устные и письменные личные и командные олимпиады, математические бои, карусели, брейн-ринги и многое другое, что повышает мотивацию к изучению математики и развивает математические способности у учеников. Наши ученики 5–7 классов являются постоянными и активными участниками этих сборов. Время показало, что после таких погружений в предмет ученики, как правило, стремятся заниматься математикой на углубленном уровне.

Доброй традицией в лицее стала работа летнего математического лагеря «Алгебриоша» Детского общественного объединения «Клуб любителей математики “Алгебрионик”» при детской межрегиональной общественной организации СПб и ЛО Ю-ПИТЕР, который позволяет желающим ученикам 5–7 классов развивать свои математические способности и в каникулярный период, а ученикам математических классов – проверить свои преподавательские способности.

Многолетний анализ работы в лицее по преподаванию математики по программе ее углубленного изучения позволяет сделать вывод об успешности ее реализации: результаты ГИА в математических классах, успешность выступления на олимпиадах различного уровня, высокие показатели по итогам проводимых контрольно-педагогических измерений, признание высоко-профессионального уровня преподавания математики в матема-

тических классах по итогам мониторинга учеников и их родителей, значительный процент поступления учеников математических классов в ВУЗы и их достижения при обучении в высшей школе и, наконец, вхождение МОУ «Лицей № 1» г. Всеволожска в 2016 году в ТОП лучших школ, обеспечивающих высокий уровень подготовки выпускников по математике. Этот рейтинг составлен Московским центром непрерывного математического образования при информационной поддержке «Социального навигатора» МИА «Россия сегодня», «Учительской газеты» и при содействии Министерства образования и науки РФ.

Совершенствованию в преподавании математики нет предела, поэтому педагоги лицея не прекращают работу по поиску новых источников повышения математических знаний своих учеников.

Из опыта работы в классах с углубленным изучением математики

В углубленном изучении математики выделяются два этапа, отвечающих возрастным возможностям и потребностям школьников и, соответственно, различающихся по целям. Первый этап относится к основной школе, второй – к старшей школе. Учащийся может начать углубленное изучение математики в основной школе, начиная с 8 класса. Первый этап углубленного изучения математики является в значительной мере ориентационным. На этом этапе ученику надо помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им, с тем чтобы по окончании 9 класса он мог сделать сознательный выбор в пользу дальнейшего углубленного либо обычного изучения математики.

Программа курса математики для классов с углубленным изучением математики охватывает весь материал, содержащийся в программе для средней общеобразовательной школы. При этом подразумевается, что учащиеся должны не только достичь результатов обучения, указанных в программе, но и овладеть соответствующими знаниями, умениями и навыками на более высоком уровне, характеризующемся в первую очередь способностью решать более сложные, нестандартные задачи.

Прочное усвоение вопросов, существенно углубляющих традиционный курс, возможно лишь при условии уверенного владения вычислительными навыками и навыками преобразований, умением решать уравнения, неравенства и системы, геометрические задачи и т.д. Результатом изучения дополнительных разделов должно стать не просто знание учащимися соответствующих терминов и формулировок, а умение применять изученные теоремы и методы, самостоятельно решать задачи: именно в ходе решения задач развиваются интересы и склонности к математике. В методических материалах (в частности, сборники задач) для классов с углубленным изучением математики последовательно проведена линия на интеллектуальное развитие учащихся.

Мы часто считаем, что развитие школьника происходит само собой в процессе изучения математики. Однако и сама технология обучения математике способствует такому развитию.

Обозначим принципы педагогической техники, применяемые в классах с углубленным изучением математики:

- Свобода выбора. Никто из нас не любит навязанных действий, чуждых решений, отсутствия выбора. И особенно не любят этого дети. В любом обучающем или управляющем действии, где только возможно, нужно предоставлять ученику право выбора, с одним важным условием: право выбора всегда уравнивается осознанной ответственностью за свой выбор.

- Открытость. «Нельзя птицу учить летать в клетке. Нельзя выращивать «творческий мускул», не вылетев на простор заданий «открытых» – допускающих разные подходы к решению, разную степень углубления в существо проблемы, разные варианты ответов» (А. А. Гин).

- Принцип деятельности. «Напичканный знаниями, но не умеющий их использовать ученик напоминает фаршированную рыбу, которая не может плавать», – говорил академик А.Л. Минц. А Бернард Шоу утверждал: «Единственный путь, ведущий к знанию, – это деятельность». Действительно, чтобы знание становилось инструментом, ученик должен с ним работать. Это означает, что знания надо применять, расширять и дополнять, находить новые связи и рассматривать в разных моделях, поэтому даже в чисто «технических» задачах предусматривать возможность для поиска другого, более простого решения, чем «лобовое». Стараться на уроках решать задачи, которые содержат интересную идею или знакомят с важным результатом.

- Обратная связь. Регулярно контролировать процесс обучения с помощью развитой системы приемов обратной связи.

- Принцип идеальности. Максимально использовать возможности, знания, интересы самих учащихся с целью повышения результативности. Чем больше активность, сама организация учеников, тем выше идеальность обучающего действия. Если мы грамотно согласуем темп, ритм и сложность обучения с возможностями учеников, то тогда они почувствуют свою ус-

пешность и сами захотят ее подкрепить. Поэтому следует иметь в виду, что требования к знаниям и умениям учащегося при углубленном изучении математики в 8–9 классах ни в коем случае не должны быть завышенными. Чрезмерность требований порождает перегрузку, что ведет к угасанию интереса к математике.

Целью углубленного изучения математики в школе должна быть подготовка к дальнейшему обучению в профильных с математикой областях, для чего необходимо решить задачу интеллектуального развития учащихся, в частности, развития математического способа мышления.

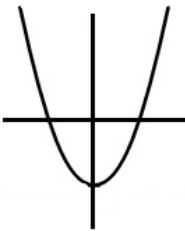
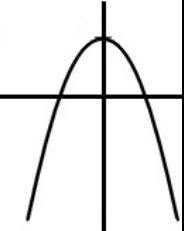
В качестве примера методики реализации углубленного изучения математики рассмотрим тему «Задачи с параметром, связанные с исследованием квадратного трёхчлена», которая является важнейшей в формировании у учащихся таких мыслительных операций, как анализ и синтез. Ее успешное освоение можно считать залогом для осознанной работы учащихся при решении в дальнейшем задач с параметром. Опыт работы в 8–9 классах с углубленным изучением математики показывает, насколько нелегко дается учащимся полное понимание данной темы. Изложение материала требует высокой степени наглядности.

При решении таких задач приходится работать с тремя типами моделей:

- вербальная модель – словесное описание задачи;
- геометрическая модель – график квадратичной функции;
- аналитическая модель – система неравенств, при помощи которой описывается геометрическая модель.

Надо добиться того, чтобы ученики научились устанавливать связь между этими моделями. Например, если старший коэффициент квадратного трёхчлена меньше 0, то ветви параболы направлены вниз, или если $D=b^2-4ac>0$, то трёхчлен имеет различные действительные корни и график пересекает ось абсцисс в двух точках. График $y = ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) находится ниже оси абсцисс, следовательно, $a<0$ и $D<0$. Последнюю геометрическую модель можно описать тремя способами: неравенство $ax^2+bx+c\geq 0$ не имеет решений; трёхчлен не имеет действительных корней и его старший коэффициент отрицателен. Главное

правило при решении задач с параметром, сводящихся к квадратным уравнениям при построении геометрической модели, графика квадратной функции: учитывать условия, фиксирующие положение параболы. Для формирования у учащихся умения переводить словесное условие задачи в аналитическую форму – сводить её к решению уравнений, неравенств и систем, и совокупностей уравнений или неравенств, – используется таблица. В ней задаётся одна из моделей задачи (вербальная, геометрическая, аналитическая), ученику надо перевести данную модель в другую форму. Например:

Вербальная модель	Графическая модель $a>0$ $a<0$		Аналитическая модель
$f(x)$ имеет корни различных знаков			$\begin{cases} >0 \\ /a<0 \end{cases}$ $\begin{cases} >0 \\ (0)<0 \end{cases}$ $\begin{cases} <0 \\ (0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\cdot f(0)<0$

Система работы над задачами с параметрами аналогична работе с текстовыми задачами. Главная цель, которая стоит перед учителем: запустить у учащихся «механизмы» логического и творческого мышления. В результате этой работы учащиеся составляют таблицу, в которой содержатся теоремы о расположении корней квадратного трёхчлена, а также частные случаи (оба корня положительные, оба корня отрицательные, корни разных знаков).

В дальнейшем учащиеся используют умение перевести аналитическую зависимость в наглядную форму и обратно при

решении задач с параметрами. Например: определить число решений уравнения $|x+2| = ax+1$ в зависимости от значения параметра a . Данную задачу можно решить тремя способами: аналитическим, использованием координатной плоскости (x ; a), поворотом прямой. Умение решать задачу разными способами поможет учащимся обрести чувство уверенности в своих силах. Решать задачи с параметрами надо в системе: каждый пройденный тип уравнений (неравенств) завершать задачами с использованием параметра. Во-первых, школьнику трудно привыкнуть к параметру за два–три занятия – нужно время; во-вторых, использование подобных задач улучшает закрепление пройденного материала; в-третьих, оно способствует развитию математической и логической культуры учащихся, а также развитию интереса к математике, поскольку открывает перед ними новые методы и возможности для самостоятельного поиска.

Еще один пример. Современный математический язык – это язык теории множеств и математической логики. Подход к изучению разделов «Теория вероятностей», «Комбинаторика» и «Логика» на основе элементов теории множеств позволяет изучение этих тем сделать наглядным. Для решения этой методической задачи используются некоторые положения теории поэтапного формирования умственных действий, развитой П.А. Гальпериным. Согласно этой теории формирование умственного действия проходит в нескольких формах: материализованной, внешнеречевой и умственной. Освоение умственного действия начинается в материализованной форме, которая характеризуется тем, что объект действия задан ученику в виде реальных предметов или моделей. В нашем случае материализованная форма деятельности – та форма, в которой ученики оперируют с объектами, доступными для наглядного восприятия, – появляется в результате перевода задачи на язык, использующий множества. На начальном этапе работы надо добиться понимания записи $A \subset B$. При этом каждое упражнение выполняется в материализованной форме, т. е. с кругами. Вот примеры таких упражнений:

1. $A \subset B$. Верно ли, что $B \subset A$? 2. $A \subset B$, $B \subset C$. Верно ли, что $A \subset C$?

2. $A \subset B$, $B \subset A$. Могут ли обе эти записи быть верными?

Для повышения интереса к учебному материалу учащимся предлагаются несколько нематематических утверждений и фактов из обыденной жизни, связанных с употреблением слов «необходимо» и «достаточно».

Учащиеся вместо многоточия вставляют слова «необходимо» или «достаточно», а где можно – «необходимо и достаточно».

Примеры заданий:

1. «Чтобы поступить в высшее учебное заведение, ... иметь среднее образование».

2. «В нашей стране, чтобы поступить учиться в 10 класс, ... окончить 9 классов».

3. «Чтобы земля на дачном участке была мокрой, ..., чтобы пошёл дождь».

После этого рисунок, соответствующий записи $A \subset B$, начинает «перетолковываться». Используя обычные житейские представления, этот рисунок можно «подать» как задачу о «попадании в две мишени: А и В». *Ответ:* чтобы попасть в мишень В, достаточно попасть в мишень А, а чтобы попасть в мишень А, необходимо попасть в мишень В. После этого формулируем два утверждения:

1) Чтобы элемент x принадлежал множеству В, достаточно, чтобы он принадлежал множеству А.

2) Чтобы элемент x принадлежал множеству А, необходимо, чтобы он принадлежал множеству В.

Дальше начинается «сворачивание фраз». В конце концов приходим к таким фразам: «А достаточно для В» и «В необходимо для А». Следующий этап работы с учениками заключается в том, что они переводят информацию, заданную на кругах, на язык «необходимо и достаточно». Рисуются схемы, и ученики к каждому из рисунков формулируют фразу с использованием терминов «необходимо» и «достаточно». На следующем этапе работы информация поступает к ученикам через речь. Они

должны нарисовать схему услышанного, и диктуются такие, к примеру, фразы:

1) А достаточно для В; 2) Р необходимо для Q.

Результат такой работы можно оформить в виде таблицы, в которой записывается словесная формулировка и соответствующая схема. И только теперь переходим к решению содержательных задач. В следующих задачах даны две высказывательные формы. Требуется их связать термином «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно».

1. Для того чтобы число делилось на 10, ..., чтобы оно делилось на 5.

2. Для того чтобы число делилось на 5, ..., чтобы оно делилось на 10.

3. Для того чтобы число делилось на 6, ..., чтобы оно делилось на 2 и на 3.

Для решения первой задачи используем множества. Пусть А – множество истинности первой формы, а В – множество истинности второй высказывательной формы. Нарисуем условно множество А. Берём любой элемент из А, т. е. любое число, делящееся на 10, и спрашиваем себя: а будет ли этот элемент принадлежать множеству В, т. е. делиться на 5? Ответ – да, и в случае такого ответа сразу вспоминаем круг, содержащий А. А такую схему ученики уже умеют формулировать нужным образом. Ниже в табл. 1 (на с. 68) показаны переводы записи $A \subset B$ в другие формы.

В теории вероятностей при введении операции над событиями важно заметить, что и определение операций над событиями, и правила с ними очень похожи на операции и правила действий с множествами. Это не случайное сходство, и алгебра событий, и алгебра множеств – частные случаи одной и той же математической конструкции – булевой алгебры. Привлечение в раздел теории вероятностей теоретико-множественных аналогий облегчает процесс преподавания. В таблице 2 (с. 68) показан пример взаимосвязи между операциями теории множеств и их вероятностным смыслом.

Таблица 1

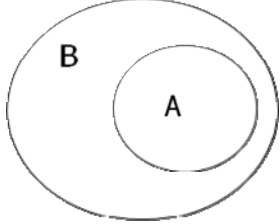
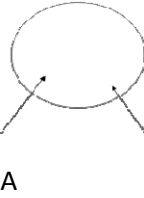
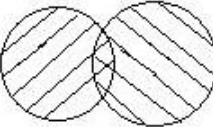
№ пп.	Операции теории множеств	Схема (круги Эйлера)	Логические символы
1	1) $A \subset B$		$P(x) \Rightarrow Q(x)$ $A = \{x: P(x)\}$ – множество истинности P(x) $B = \{x: Q(x)\}$ – множество истинности Q(x)
2	2) $A \subset B$ $B \subset A$		$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

Таблица 2

Основные операции теории множеств	Схема (круги Эйлера)	Вероятностный смысл	Обозначение
$A \cup B$		Произошло событие А, или событие В, или произошли оба	$A + B$

Использование на уроке задач, в которых возможно более полное слияние аналитических и геометрических методов, позволяет показать учащимся геометрические интерпретации аналитических выражений и аналитическое описание геометриче-

ских образов. Ниже приводится пример урока по теме «Среднее геометрическое», разработанного с использованием технологии проблемного обучения. На уроке учащиеся располагают в порядке возрастания числа $\frac{2ab}{a+b}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$ при условии $a>0$, $b>0$. Таким образом, используя аналитические методы решения задач, учащиеся приходят к неравенству о средних. Иллюстрация средних величин посредством трапеции помогает сделать неравенство о средних наглядным.

В классах с углубленным изучением математики в процессе обучения формируется более высокий уровень абстрактного мышления. Для достижения этого результата используются максимальные возможности наглядности: графическая интерпретация, геометрическая интерпретация, круги Эйлера.

Урок математики по теме «Среднее гармоническое» (8 класс)

Цели урока:

- *деятельностная*: формирование универсальных учебных действий на примере рассмотрения среднего гармонического;
- *предметно-дидактическая*: формирование знаний о среднем гармоническом и установление связи вводимого понятия с ранее изученными понятиями среднего арифметического и среднего геометрического.

Планируемые результаты урока:

предметные:

- знают определение среднего гармонического;
- понимают графическую интерпретацию среднего гармонического;
- применяют среднее гармоническое для описания на математическом языке разнообразных реальных ситуаций;

метапредметные:

- участвуют в выявлении, постановке и решении учебной проблемы, выдвигают и доказывают гипотезу;

- выполняют геометрические построения (знаково-символическое моделирование);

- сравнивают среднее гармоническое со средним арифметическим и со средним геометрическим;

- работают с учебником;

личностные: осознают роль математики в познании окружающего мира.

Тип урока:

- *по ведущей дидактической цели*: изучение нового материала;

- *по способу организации*: синтетический;

- *по ведущему методу обучения*: проблемный.

Методы обучения:

- *основной*: проблемный;

- *дополнительные*: беседа, объяснение, самостоятельная работа и др.

Средства обучения:

- Геометрия: 8 класс: Дополнительные главы к школьному учебнику / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, С.А. Шестаков, И.И. Юдина. – М.: Просвещение, 2008.

- Геометрия: 7–9 классы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – М.: Просвещение, 2006.

- Презентация по теме «Среднее гармоническое».

- Раздаточные материалы с задачами.

- Мультимедийная техника.

Ход урока

Этапы урока	Методы обучения	Содержание деятельности		Формируемые УУД	Методы оценки/самооценки
		Учителя	Учеников		
1. Организационный 2. Формирование новых знаний, умений и навыков	Проблемный			Проблемно-поисковые	
2.1. Актуализация опорных знаний, умений и навыков	Самостоятельная работа	Организует работу учащихся по выполнению следующих заданий: <i>Задание 1.</i> Приведите пример геометрической интерпретации среднего арифметического для двух отрезков. <i>Задание 2.</i> Приведите пример геометрической интерпретации среднего геометрического для двух отрезков. <i>Задание 3.</i> Сделайте геометрическую интерпретацию среднего арифметического и среднего геометрического	Выполняют задания на местах и у доски, обсуждают результаты работы	Общеучебные, коммуникативные	Совместное обучение, сравнение с эталоном

71

72

Продолжение табл.

Этапы урока	Методы обучения	Содержание деятельности		Формируемые УУД	Методы оценки/самооценки
		Учителя	Учеников		
2.2. Создание проблемной ситуации	Самостоятельная работа	рического для двух отрезков на одном рисунке Организует работу учащихся по следующему заданию: «Проведите горизонтальный отрезок AC любой длины. Затем выполните построение, указанное в задаче № 612: АВ = 6 см, CD = 4 см. Измерьте расстояние от точки O до прямой AC».	Анализируют, обсуждают ответы друг друга. В ходе обсуждения результатов работы сталкиваются с тем, что расстояние от точки O до прямой AC во всех выполенных построениях одинаковое.	Общеучебные, коммуникативные	Совместное обучение.
2.3. Постановка учебной проблемы 2.4. Решение учебной проблемы	Беседа	Организует работу учащихся по следующему вопросу: – Зависит ли расстояние от точки O до прямой AC от длины AC? – Как вы думаете, почему это расстояние не зависит от длины AC? – Почему расстояние от точки O до прямой AC не зависит от длины AC?	Отвечают на вопросы, участвуют в обсуждении, приходят к выводу о том, что расстояние от точки O до прямой AC одинаковое и не зависит от длины AC. Но не могут объяснить – почему не зависит? Воспринимают учебную проблему	Общеучебные, коммуникативные Регулятивные	Совместное обучение

а) выдвижение гипотезы	Самостоятельная работа	Организует деятельность учащихся по решению поставленной задачи по следующему алгоритму: 1. Составление плана решения поставленной задачи. 2. Решение задачи. 3. Формулировка гипотезы в виде вывода по итогам решения задачи. Сопровождает учащихся в процессе решения задачи и выдвижения гипотезы. Подтверждает верность высказанного предположения, вводит и раскрывает понятие «среднее гармоническое», используя презентацию.	Решают задачу по введённому алгоритму. Формулируют гипотезу на основе аналогии геометрической интерпретации среднего арифметического и среднего геометрического. «Расстояние от точки О до прямой АС не зависит от длины АС так как является средней величиной» Воспринимают объяснение учителя	Логические, общеучебные, регулятивные, коммуникативные	Совместное обучение
б) проверка гипотезы	Объяснение, демонстрация				
в) формулировка окончательного решения	Самостоятельная работа	Организует работу с учебником по следующему плану: 1. Определение среднего гармонического. 2. Геометрический смысл среднего гармонического.	Работают по плану: 1. Записывают определение среднего гармонического в тетрадь. 2. Делают геометрическую интерпретацию среднего гармонического	Общеучебные, знаково-символические, регулятивные	Самопроверка

Продолжение табл.

Этапы урока	Методы обучения	Содержание деятельности		Формируемые УУД	Методы оценки/самооценки
		Учителя	Учеников		
2.5. Доказательство применения найденного решения	Самостоятельная работа	Организует деятельность учащихся по решению задачи. <i>Вариант 1. Геометрическая задача:</i> «Доказать, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельны её основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, является средним гармоническим для основания трапеции». <i>Вариант 2. Физическая задача:</i> «Из пункта А в пункт В автомобиль ехал со скоростью a км/ч, а обратно со скоростью b км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля». <i>Вариант 3.</i> «Сравнить среднее арифметическое и среднее гармоническое»	Выполняют задания по вариантам. Затем от каждого варианта один ученик записывает решение на доске. Обсуждают решения задач и делают выводы по следующим аспектам изученного материала: 1) геометрическая интерпретация среднего; 2) сравнение среднего гармонического со средним арифметическим и средним гармоническим; 3) геометрическая интерпретация на одном рисунке (фигура трапеция) всех трёх средних; 4) применение среднего гармонического в смежных дисциплинах	Логические, общеучебные, регулятивные, коммуникативные	Совместное обучение, сравнение с эталоном

3. Подведение итогов, рефлексия	Беседа	<i>Вариант 4.</i> «Сравнить среднее геометрическое и среднее гармоническое» Организует деятельность по анализу работы на уроке по следующим вопросам: – В чём вы испытывали затруднения? – Нравятся ли тебе самому полученные решения в задачах? – Возможен ли более рациональный способ решения? – В каких смежных дисциплинах вам понадобятся знания среднего гармонического?	Отвечают на вопросы, участвуют в обсуждении, анализируют, делают выводы	Регулятивные, коммуникативные	Совместное обсуждение
---------------------------------	--------	--	---	-------------------------------	-----------------------

Функциональный метод в курсе математики средней школы и методика его использования при решении задач

1. Определение функционального метода

Правую и левую части уравнения (неравенства) будем рассматривать как функции. Придерживаться будем следующих определений:

- Уравнение с одним неизвестным (аргументом, переменной) есть равенство двух функций $f(x) = g(x)$, рассматриваемых в их общей области определения.

- Соотношение вида $A(x) < B(x)$, $A(x) > B(x)$, $A(x) \leq B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, где $A(x)$, $B(x)$ – функции от x , назовём неравенством.

Опираясь на данные определения уравнения и неравенства, можно дать определение функционального метода.

Определение: метод решений уравнений и неравенств, основывающийся на использовании совокупности свойств функции, входящих в левую и правую части уравнения (неравенства), называется функциональным методом.

Решение уравнений и неравенств функциональным методом состоит в следующем:

2. Устанавливается область определения уравнения (неравенства), которая определяется как общая часть (пересечение) областей определения функций, представляющих обе части уравнения (неравенства).

3. Выявляется возможность и целесообразность использования свойств входящих в уравнение (неравенство) функций.

4. Выявленные свойства используются при поиске и обосновании решения.

2. Формы реализации функционального метода

Функциональный метод решения уравнений и неравенств может быть реализован в следующих формах, характеризующихся использованием различных свойств функций.

2.1. Использование области определения

За область определения исходного уравнения (неравенства) примем пересечение областей определения функций, представляющих обе части уравнения (неравенства). В зависимости от того, какое получится множество (пустое, конечное или бесконечное), делаем вывод о дальнейших шагах поиска решения уравнения (неравенства).

Итак, пусть $f(x) = g(x)$ – уравнение, $f(x) < g(x)$ – неравенство),

$D(f)$ – область определения функции f ,

$D(g)$ – область определения функции g .

Рассмотрим множество $D = D(f) \cap D(g)$ – область определения уравнения (неравенства).

Пусть X – множество решений уравнения (неравенства).

Множество решений X является подмножеством множества D ($X \subseteq D$).

В зависимости от того, сколько элементов содержит множество D , можно будет делать выводы относительно множества X .

- $D = \emptyset$ то и $X = \emptyset$, и уравнение (неравенство) *решений не имеет*.

- $D = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ – конечное множество, тогда решениями уравнения

$f(x) = g(x)$ (неравенства $f(x) < g(x)$) будут лишь те x_k из D , для которых $f(x_k) = g(x_k)$ – верное числовое равенство, $f(x_k) < g(x_k)$ – верное числовое неравенство. Таким образом, решение сводится к подстановке x_k в уравнение (неравенство) и оценке истинности полученного числового равенства (неравенства).

- D – бесконечное. В этом случае нельзя найти решение прямой подстановкой значений переменной в уравнение (нера-

венство). Поэтому следует рассмотреть другие методы решения и способы рассуждений при поиске решения.

Примеры.

1) Решить уравнение: $\sqrt{2x-5} = \sqrt{2-x}$

Решение: $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 2x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 2,5 \end{cases}$. Отсюда следует, $D = \emptyset$.

Ответ: нет решений.

2) Решить неравенство: $\sqrt{-x^2+5x-6} < 4^{\sqrt{x-3}} + 1$.

Решение: $\begin{cases} -x^2+5x-6 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Таким об-

разом, область определения (D) состоит из одного элемента: $x = 3$.

Подставим это значение в уравнение:

$\sqrt{-9+15-6} < 4^{\sqrt{3-3}} + 1$, или $0 < 2$. Значит, $x = 3$ – решение неравенства.

Ответ: $x = 3$.

3) Решить неравенство:

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[6]{x^4-1} < 2^x - \log_2(1+x^4).$$

Решение: $D(f) = \{-1; 1\}$, $D(g) = R$, отсюда $D = \{-1; 1\}$.

Подставим эти значения переменной в неравенство. При $x = -1$

получаем неверное неравенство: $0 < -\frac{1}{2}$, а при $x = 1$ получаем

верное неравенство: $0 < 1$.

Ответ: $\{1\}$.

4) Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\sqrt{x^2-7x+12} + \sin \sqrt[6]{x-3} + 1 \geq a + \cos \sqrt[4]{4-x}$ имеет единственное решение.

Решение: $D = \{3; 4\}$. Единственное решение возможно только в том случае, когда только одно из этих чисел является решением неравенства. Возможны две ситуации. Рассмотрим эти варианты.

а) $x = 3$ является решением неравенства, а $x = 4$ – нет. Получаем систему неравенств $\begin{cases} 1 \geq a + \cos 1 \\ \sin 1 < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 - \cos 1 \\ a > \sin 1 \end{cases}$

б) $x = 4$ является решением неравенства, а $x = 3$ – нет.

$$\begin{cases} 1 < a + \cos 1 \\ \sin 1 \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 - \cos 1 \\ a \leq \sin 1 \end{cases}$$

Чтобы выяснить, какая из этих систем совместна, сравним $1 - \cos 1 \sim \sin 1$. Данное отношение равносильно $1 \sim \sin 1 + \cos 1$. Возведём обе части отношения в квадрат: $1 < 1 + \sin 2$. Таким образом, $1 - \cos 1 < \sin 1$ и возможным является только случай б).

Ответ: $a \in (1 - \cos 1; \sin 1]$.

Задачи для самостоятельного решения

5) Решить уравнение: $\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$ // $D = \emptyset$.

Ответ: нет решений.

6) Решить уравнение: $\sqrt{x-6} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{25-x^2}$ // $D = \emptyset$.

Ответ: нет решений.

7) Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - x - 12} + \sqrt{x^2 + 7x + 12} = \sqrt{16 - x^2}.$$

Решение. Область определения данного уравнения состоит из трёх чисел:

$D = \{-4; -3; 4\}$ Подставив эти числа в уравнение, убеждаемся, что ни одно из них не является решением. Таким образом, данное уравнение решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Задание. Составьте аналогичное уравнение, имеющее единственное решение. (Например, уравнение $\sqrt{x^2 + 7x + 12} - \sqrt{x^2 - x - 12} = \sqrt{9 - x^2}$ имеет единственный корень $x = -3$).

2.2. Использование информации о множестве значений функций

■ Если при решении уравнения $f(x) = g(x)$ удаётся показать, что при всех значениях $x \in D$ справедливы неравенства $f(x) \leq A$ и $g(x) \geq A$, то на D исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

■ Если при всех значениях $x \in D$ справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A – некоторое число, то на D уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Примеры.

1) Решить уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+4} = 3$

2) Решить уравнение: $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$

Решение: $f(x) \leq 1$, $g(x) = (x+1)^2 + 2 \geq 2$. Пусть $A = 1,5$. Тогда на всей области определения уравнения выполняется неравенство: $f(x) < 1,5 < g(x)$. Таким образом, равенство невозможно ни для каких значений x .

Ответ: нет решения.

2а) Решить неравенства: $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leq (\geq) x^2 + 2x + 3$

3). Решить уравнение: $\cos x = 1 + x^8$.

Решение: $f(x) \leq 1$, $g(x) \geq 1$, значит

$$\cos x = 1 + x^8 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ 1 + x^8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Таким образом, } x = 0.$$

Ответ: 0.

4) Решить уравнение:

$$\sin^2 x + \frac{\sqrt{\cos 8x + 3} - \sqrt{1 - \cos 8x}}{\sqrt{1 - \cos 8x} + \sqrt{\cos 8x + 3}} = 2.$$

Решение. Учитывая множества значений тригонометрических функций, левая часть уравнения принимает значение, рав-

ное 2, только в случае выполнения системы равенств:

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ 1 - \cos 8x = 0 \end{cases} \quad (\text{Обоснуйте этот факт}).$$

Первое уравнение имеет решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Проверим, какие из них удовлетворяют второму уравнению: $8x = 4\pi + 8\pi n, \cos 8x = 1$, т. е. все решения первого уравнения удовлетворяют второму (но не наоборот). Значит, они и являются решениями системы. *Ответ:* $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

5) Решить уравнение: $x^2 - \sin(xy) + 1 = 0$

Решение: $x^2 + 1 = +\sin(xy) \Rightarrow x = 0$ – но это значение не является решением. *Ответ:* нет решений.

Задачи для самостоятельного решения

6) Решить неравенство: $2^{x^2-4x+5} \leq 4x - 2 - x^2$.

Решение. Правую часть неравенства представим в виде $2 - (x - 2)^2$. Это выражение принимает наибольшее значение, равное 2, при $x = 2$.

Выделим также полный квадрат и в показателе степени, стоящей в левой части неравенства: $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. Это выражение, очевидно, принимает наименьшее значение, равное 1, при $x = 2$. Поэтому возрастающая показательная функция $y = 2^t$ принимает наименьшее значение, равное 2, при $t = 1$, если $x = 2$.

Таким образом, $2^{x^2-4x+5} \geq 2$, а $4x - 2 - x^2 \leq 2$. Следовательно, неравенство имеет единственное решение $x = 2$.

Ответ: 2.

7) Решите уравнение: $7\operatorname{tg} x + \cos^2 x + 3\sin 2x = 1$.

Решение.

$$7\operatorname{tg} x - (1 - \cos^2 x) + 3\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin x \left(\frac{7}{\cos x} - \sin x + 6\cos x \right) = 0$$

Легко видеть, что второй множитель никогда не обращается в нуль. Значит, единственное решение при $\sin x = 0$ (в этом случае $\cos x \neq 0$). *Ответ:* $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

8) Решить уравнение:

$$2\sin \frac{\pi}{2} x = x + \frac{1}{x} \quad \{-1; 1\}.$$

9) Решить уравнение $\cos 4x = +\sin \frac{5x}{3} = 2$.

Решение. Так как $|\cos t| \leq 1, |\sin t| \leq 1$, то равенство может выполняться только в том случае, когда x

$$\text{удовлетворяет системе } \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \sin \frac{5x}{3} = 1 \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы находим $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Если $x = \frac{\pi n}{2}$, то $\frac{5x}{3} = \frac{5\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}$. Найдём такие целые значения n , при которых $\sin \frac{5\pi n}{6} = 1$.

I способ. Любое число $n \in \mathbb{Z}$ можно записать в виде $n = 12k + r$, где $k \in \mathbb{Z}$, а r принимает значение $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, 6$. Нужно найти значения r , при которых выполняется равенство $\sin \frac{5\pi n}{6} = \sin \frac{5\pi(12k+r)}{6} = \sin \frac{5\pi r}{6} = 1$. Это равенство является верным только при $r = 3$. В этом случае

$$x = \frac{\pi(12k+r)}{2} = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

II способ. Требуется решить в целых числах уравнение $\frac{5\pi n}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Это уравнение равносильно следующему:

$5\pi n = 3\pi + 12\pi k$; $n = \frac{10k+2k+3}{5} = 2k + \frac{2k+3}{5}$. Тогда, чтобы n было целым, необходимо, чтобы дробь $\frac{2k+3}{5} = r, r \in \mathbb{Z}$. Или $2k+3 = 5r, r \in \mathbb{Z}; k = 2r + \frac{r-3}{2}$.

Отсюда следует, что $r = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$. Найдём соответствующее значение x .

$$x = \frac{\pi n}{2} = \pi \left(2r + \frac{r-3}{2} \right) + \frac{\pi(2(2r+\frac{r-3}{2})+3)}{10} = \frac{3\pi}{2} + 6\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

10) Решить уравнение: $x^2 + 4x \sin(xy) + 4 = 0$

Решение: $D = 16(\sin^2(xy) - 1) \geq 0$ и т. д.

Возможное решение:

$(x + 2 \sin(xy))^2 = 4\sin^2(xy) - 4$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} (x + 2 \sin(xy))^2 = 0 \\ 4\sin^2(xy) - 4 = 0 \end{cases}$. Последняя система равносильна совокупности систем:

$$: \begin{cases} x = -2 \\ \sin(xy) = 1 \\ x = 2 \\ \sin(xy) = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 2 \\ y = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

11) Решить уравнение:

$$\cos^2 2x + 0,25 \sin^2 4x + 1 - \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\cos^2 2x - \cos 2x \sin 4x + 0,25 \sin^2 4x + \cos^2 x = 0 \quad \text{или}$$

$$(\cos 2x - 0,5 \sin 4x)^2 + \cos^2 x = 0. \text{ Полученное уравнение равносильно системе}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0,5 \sin 4x \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

Уравнение $\cos x = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$,

но эти значения не удовлетворяют первому уравнению системы. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

12) Решить уравнение: $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$

Указание. Показать, что $\cos x \geq 0$ и что x лежит в первой четверти, затем можно возводить в квадрат обе части уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, 2\pi k$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

13) Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sqrt{1-x^2}$.

Ответ: 2.

14) Решите уравнение: $\sin 2x + \sin 7x = -2$. Ответ: $\emptyset$.

15) Решите уравнение: $\cos x + \cos 5x = \frac{x^2 + 1}{x}$. Ответ: $\emptyset$.

16) Решите уравнение: $\sin^8 x - \cos^5 x = 1$.

Решение. Решениями этого уравнения служат значения неизвестного, при которых одновременно $\cos x = 0$ и $|\sin x| = 1$, или же $\cos x = -1$ и $\sin x = 0$. Это числа $\frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\frac{\pi}{2} + \pi(2n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Во всех остальных случаях $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq -1$, и $|\sin x| \neq 1$. Из того, что $\sin x < 1$, следуют неравенства $\sin^6 x < 1$ и $\sin^8 x < \sin^2 x$. Из того, что $-\cos^3 x < 1$, имеем $-\cos^5 x < \cos^2 x$. Сложив эти два неравенства, получаем: $\sin^8 x - \cos^5 x < 1$. То есть во всех этих случаях уравнение корней не имеет.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\frac{\pi}{2} + \pi(2n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

17) Решите уравнение:

$$\sqrt{\cos^2((x-2)\sin 2x)} = 1 + \log_5(x^2 - 5x + 7).$$

Решение.

$$|\cos t| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\cos^2((x-2)\sin 2x)} = 1, \text{ а } \log_5(x^2 - 5x + 7) = 0.$$

Из $\log_5(x^2 - 5x + 7) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$ (не удовлетворяет уравнению).

Ответ: 2.

18) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + e^{5x} + 4x - e^{\frac{x}{5}}\right) + 2.$$

Решение. $|\sin A| \leq 1$, т. е. наибольшее значение $f(x) = 4$ (!) при условии, что $\sin A = 1$ для некоторого A , где $A(x) = \frac{\pi}{3} + e^{5x} + 4x - e^{\frac{x}{5}}$.

Если $x = 0$ $A(x) = \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, при $x = 1$ $A(x) > \frac{\pi}{2}$. Из непрерывности $A(x)$ следует, что $\exists x_0 : A(x_0) = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 4.

19) Решите неравенство: $\log_{0,5}(3 + 2 \cdot 3^x - 9^x) \leq -2$.

Решение. Пусть $t = 3^x$. Рассмотрим $g(t) = -t^2 + 2t + 3$. $E(g(t)) = (-\infty; 4]$. Учитывая ОДЗ, из этого промежутка нас удовлетворяют только промежуток $(0; 4]$. На этом промежутке множество значений функции $y = \log_{0,5} s$, где $s \in (0; 4]$ представляет отрезок $[-2; +\infty]$. Поэтому неравенство выполнимо только, если $\log_{0,5}(3 + 2 \cdot 3^x - 9^x) = -2$. Это равенство выполняется при $x = 0$.

Ответ: 0.

Самостоятельная работа №1

1. Решить уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+8} = 3$. $\{1\}$.

2. Решить уравнение: $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$.

Указание: $\sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} = 5 - (x+1)^2$ и т. д. $\{-1\}$.

3. Решить уравнение: $\cos x = x^2 - 2x + 2$. $\{0\}$.

4. Решить неравенство: $3^{2x} + 3^{-2x} \leq 2$. $\{0\}$.

5. Решить неравенство: $2|\cos \pi x| - 1 \geq \log_2 \sqrt{x^4 + 4}$.

Указание: $4|\cos \pi x| - 2 \geq \log_2(x^4 + 4)$. $\{0\}$.

2.3. Использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств

При использовании монотонности функций для решения уравнений и неравенств мы будем опираться на следующие определения и утверждения.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке $\langle a; b \rangle$, если для любых x_1, x_2 из $\langle a; b \rangle$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется: $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется убывающей на некотором промежутке $\langle a; b \rangle$, если для любых x_1, x_2 из $\langle a; b \rangle$, таких что $x_1 < x_2$, выполняется: $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется монотонной на некотором промежутке, если она на этом множестве либо возрастает, либо убывает.

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения различных знаков. Тогда она обращается в нуль хотя бы в одной точке этого отрезка. При этом если функция f монотонна на $[a; b]$, то она принимает значение 0 лишь один раз.

Следствие 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она принимает на этом отрезке любое значение μ , заключённое между $f(a)$ и $f(b)$.

Следствие 2. Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не обращается в нуль внутри этого отрезка (т. е. на интервале $(a; b)$), то она имеет один и тот же знак во всех его внутренних точках.

Утверждение 1. Пусть $f(x)$ – непрерывная и монотонная функция на промежутке $\langle a; b \rangle$, тогда уравнение $f(x) = c$, где $c = \text{const}$, может иметь не более одного корня на $\langle a; b \rangle$.

Утверждение 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на $\langle a; b \rangle$ функции, $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает на $\langle a; b \rangle$, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного корня на $\langle a; b \rangle$.

Примеры.

1) Решить уравнение: $12^x + 5^x = 13^x$.

Решение. Легко догадаться, что $x = 2$ – корень уравнения. Разделим обе части уравнения на 12^x , получим уравнение: $\left(\frac{5}{12}\right)^x + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^x$. Функция $f(x)$, стоящая слева, непрерывна и убывает, функция $g(x)$, стоящая справа, непрерывна и возрастает. Отсюда, согласно утверждению 2, $x = 2$ – единственный корень уравнения.

Ответ: 2.

2) Решить неравенство:

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4.$$

Решение. Найдём область определения функции, стоящей слева: $D(f) = [0; 1]$. На $D(f)$ непрерывна и возрастает, причём $f(1) = 4$. Таким образом, промежутки $[0; 1)$ удовлетворяют этому неравенству.

Ответ: $[0; 1)$.

3) Решить систему:
$$\begin{cases} 3x + \cos x = 3y + \cos y \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим функцию:

$f(z) = 3z + \cos z$, $f'(z) = 3 - \sin z > 0$, т. е. функция непрерывна и возрастает. Следовательно, первое равенство вы-

полняется только при $x = y$. Тогда из второго уравнения получаем: $x = y = 3$.

Ответ: $(3; 3)$.

4) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+5} = a(x^2+4)$ имеет единственный корень на отрезке $[-4; -1]$.

Решение: $\frac{\sqrt{x+5}}{(x^2+4)} = a$. Таким образом, $a \in E_f$ (имеется хотя бы один корень у данного уравнения).

Рассмотрим функции $f_1(x) = \sqrt{x+5}$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

Обе эти функции непрерывно возрастают и положительны на отрезке $[-4; -1]$. Следовательно, их произведение является непрерывной возрастающей функцией на этом отрезке. $E_f = [f(-4); f(-1)] = [0,05; 0,4]$. Таким образом, уравнение имеет единственное решение на промежутке $[-4; -1]$ при $a \in [0,05; 0,4]$.

Ответ: $[0,05; 0,4]$.

5) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\sin x + 15y = 5x + 3\sin 3y \\ 3^x = 5^{y^2} \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы $3\sin x - 5x = 3\sin 3y - 15y$ и рассмотрим функцию $f(t) = 3\sin t - 5t$. Тогда левая часть уравнения получается при $t = x$, а правая при $t = 3x$. $f(t)$ определена и дифференцируема на R , причём $f'(t) = 3\cos t - 5 < 0$ при всех t , т. е. $f(t)$ убывает и всякое значение принимает только один раз. Таким образом, левая часть уравнения равна правой, только если $x = 3y$. Из второго уравнения получаем:

$$3^{3y} = 5^{y^2}; 3y = y^2 \log_3 5 \Rightarrow y = 0 \text{ или } y = 3 \log_3 5;$$

$y = 0 \Rightarrow x = 0; y = 3 \log_3 5 \Rightarrow x = 9 \log_3 5$. **Ответ:** $(0; 0)$, $(9 \log_3 5; 3 \log_3 5)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - 4 = 0.$
2. $2x - \sqrt{3-2x} - 3 = 0.$
3. $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 0.$
4. $2\log \frac{\pi}{4}x - 3\sqrt{\frac{4x}{\pi}} + 1 = 0.$
5. $3^{2-x} \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0.$
6. $5^x - 4^x - 3^x = 0.$
7. $\arcsin\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) - \arcsin \sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$
8. $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - 4 = 0.$
9. $2x - \sqrt{3-2x} - 3 = 0.$
10. $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 0.$
11. $2\log \frac{\pi}{4}x - 3\sqrt{\frac{4x}{\pi}} + 1 = 0.$
12. $3^{2-x} \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0.$
13. $5^x - 4^x - 3^x = 0.$
14. $\arcsin\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) - \arcsin \sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$
15. $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - 4 = 0.$
16. $2x - \sqrt{3-2x} - 3 = 0.$
17. $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 0.$
18. $2\log \frac{\pi}{4}x - 3\sqrt{\frac{4x}{\pi}} + 1 = 0.$

19. $3^{2-x} \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0.$
20. $5^x - 4^x - 3^x = 0.$
21. $\arcsin\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right) - \arcsin \sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$
22. $(\sqrt{3+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{3-\sqrt{3}})^x - 6 = 0$
23. $(\cos \frac{\pi}{7})^x + (\sin \frac{\pi}{7})^x - 1 = 0.$
24. $2x + 3 \lg x - 2 = 0.$
25. $2x + 3 \lg (3x+4) - 7 = 0$
26. $3 \arcsin x + \pi_x - \pi = 0.$

Самостоятельная работа №2

1. $\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt{3-x} = 4$
2. $13^x + 12^x - 25 = 0.$
3. $2 \log_{\frac{\pi}{4}} x + \log_{\frac{\pi}{5}} \left(x + \frac{\pi}{5} - 1\right) - 1 = 0$
4. $3 \arcsin x - \pi x - \frac{\pi}{2} = 0.$
5. $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x - 2^x = 0$
6. $3 \cdot 16^x + 36^x - 2 \cdot 81^x = 0.$
7. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} = 0.$
8. $2x^2 + x + \frac{1}{x} = 0$

2.4. Использование симметрии при решении уравнений и неравенств (чётные и нечётные функции). Периодичность функций

Определение 1. Функция f называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$, такое, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. В этом случае число T называют *периодом* функции f .

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *чётной* (*нечётной*), если $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) для любого x из области определения функции.

Всякое уравнение вида: $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $y(x) = 0$, где $y(x) = f(x) - g(x)$.

Утверждение 1. Множество решений уравнения $f(x) = 0$ симметрично относительно нуля, если $f(x)$ – чётная или нечётная функция.

Утверждение 2. Множество решений неравенства $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) симметрично относительно нуля, если $y(x)$ – чётная функция.

Примеры.

1. Решить уравнение $x^2 + |x| - 2 = 0$.

Решение. Функция $f(x) = x^2 + |x| - 2$ – чётная, поэтому достаточно найти её решение для $x \geq 0$. Для таких x уравнение примет вид: $x^2 + x - 2 = 0$. Корни этого уравнения $x = 1$ или $x = -2$. Т. к. $x \geq 0$, то $x = 1$. Тогда множество его решений, в силу симметричности, будет $X = \{-1; 1\}$.

Ответ: $-1; 1$.

2. Решить неравенство $|2x-1| + |2x+1| \leq 2$.

Решение. Функция $y(x) = |2x-1| + |2x+1| - 2$ является чётной, поэтому достаточно найти её решение для $x \geq 0$.

$$0 \leq x < \frac{1}{2}: 1 - 2x + 2x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2, \text{ т. е. } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{1}{2}: 2x - 1 + 2x + 1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}, \text{ т. е. } x = \frac{1}{2}$$

В силу симметричности множества решений относительно нуля, получаем $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. *Ответ:* $[-0,5; 0,5]$.

3. Решить уравнение $\sin 2x \sin 7x = 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin 2x \sin 7x - 1$, она является чётной и периодической с периодом 2π . Рассмотрим промежуток $[-\pi; \pi]$ длины 2π . В силу чётности достаточно найти корни, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$. Т. к. $|\sin \lambda x| \leq 1$, то наше уравнение равносильно совокупности

$$\text{двух систем: } \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 7x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 7x = -1 \end{cases}$$

Множество решений каждой из систем пусто.

Ответ: нет решений.

4. При каких значениях a уравнение $x^2 - \sqrt{2}a \sin(\cos x) + \sqrt{2} = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Так как функция $f(x) = x^2 - \sqrt{2}a \sin(\cos x) + \sqrt{2}$ – чётная, то из того, что x – корень, следует, что $(-x)$ тоже корень. Поэтому $x=0$ есть необходимое условие, кроме того, не должно быть других.

$$-\sqrt{2}a \sin 1 + \sqrt{2}; \text{ или } \frac{1}{\sin 1} = a. \text{ При } a = \frac{1}{\sin 1} \text{ получаем:}$$

$$x^2 + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 1} \sin(\cos x). \quad \sin(\cos x) \leq \sin 1, \text{ т. е. } \frac{\sqrt{2}}{\sin 1} \sin(\cos x) \leq \sqrt{2},$$

$$\text{а } x^2 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2}. \text{ В результате мы приходим к системе:}$$

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sin 1} \sin(\cos x) = \sqrt{2} \end{cases}, \text{имеющей единственное решение } x=0.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{1}{\sin 1}$$

Задачи для самостоятельного решения

5. Решить уравнение $x^2 - 6|x| + 7 = ||x| - 3|$.

Решение. Ввиду чётности входящих в уравнение функций, рассмотрим решение уравнения при $x \geq 0$. Получаем уравнение: $x^2 - 6x + 7 = |x - 3|$. Это уравнение равносильно совокупности систем:

$$1) \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = x - 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = -x + 3 \\ 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

Решением первой системы является $x = 5$, решение второй системы $x = 1$. Учитывая симметричность решений, получаем всего четыре решения. *Ответ:* $\{-5; -1; 1; 5\}$.

6. Решить неравенство $|\sin x| > |\cos x|$.

Решение. Рассмотрим неравенство $|\sin x| - |\cos x| < 0$. Функция $f(x) = |\sin x| - |\cos x|$ является периодической с периодом 2π (необязательно искать наименьший положительный период, т. к. зачастую поиск такого периода представляет собой довольно трудную задачу) и чётной.

Возьмём промежуток $[-\pi; \pi]$ длины 2π . В силу чётности достаточно найти корни, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}: \sin x > \cos x \Leftrightarrow \sin x - \cos x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi: \sin x > -\cos x \Leftrightarrow \sin x + \cos x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}. \text{ Учитывая}$$

заданный промежуток, получаем: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$. Объединяя

$$\text{эти решения, получаем } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

Осталось только учесть чётность и периодичность функции.

$$\text{Окончательно, получаем: } \frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n.$$

$$\text{Ответ: } (\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

7. Решить неравенство: $x^2 - 4|x| < 5$.

8. Решить уравнение: $x^2 - 7|x| + 6 = 0$.

Дополнительные задачи

$$9. \text{ Решить уравнение: } \sqrt[3]{25x(2x^2 + 9)} = 4x + \frac{3}{x}.$$

Указание. Использовать теорему Коши для трёх слагаемых, предварительно разделив обе части уравнения на x .

10. Решить неравенство графически: $4x < x^3$.

11. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} x \geq (y-a)^2 \\ y \geq (x-a)^2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Решение. Все решения системы симметричны $(x_0; y_0) \rightarrow (y_0; x_0)$. Таким образом, $x_0 = y_0$. Получаем:
 $x \geq (x-a)^2$, $x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0$. Чтобы уравнение имело единственное решение, должно быть

$(2a+1)^2 - 4a^2 = 0$, т. е. $a = -\frac{1}{4}$. Подставим $a = -\frac{1}{4}$ и сложим неравенства системы. После преобразования получаем:

$$(y - \frac{1}{4})^2 + (x - \frac{1}{4})^2 \leq 0, \quad x = y = \frac{1}{4}. \quad \text{Ответ: } a = -\frac{1}{4}.$$

12. Решить систему:
$$\begin{cases} tg^2 x + ctg^2 x = 2 \sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}$$

Указание. Обозначим $tg^2 x = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} tg^2 x = 1 \\ \sin^2 y = 1 \\ \cos^2 z = 0 \end{cases}$ и т. д.

13. Решить уравнение: $(x^4 - 2x^2 + 3)(y^4 - 3y^2 + 4) = 7$.

Указание. Показать, что $x^2 = 1$, $y^2 = 1, 5$.

14. Решить уравнение:
 $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6 \quad (x^2 - 6x + 11)$.

Левую часть возвести в квадрат и показать, что она принимает максимальное значение 2 при $x = 2$. Выделив полный квадрат в правой части, убедиться, что минимальное значение правой части тоже 2 также при $x = 2$. *Ответ:* 2.

15. Решить уравнение: $\sin^5 x + \cos^3 x = 1$.

Указание. Выяснить, при каких условиях данные неравенства $\sin^5 x < \sin^2 x$ и $\cos^3 x < \cos^2 x$ превращаются в равенства.

1. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1} = 1$	1. $4 + \sqrt{2y-3} = \sqrt{y-2}$
2. $\sqrt{10} + \sqrt{x-\sqrt{3}} = 3$	2. $6 - \sqrt{x+\sqrt{2}} = 7$
3. $\sqrt{y^2 - y - 2} + \sqrt{y^2 - 5y - 6} = 0$	3. $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$
4. $(x+2)\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 0$	4. $(x+1)\sqrt{x^2 - x + 2} \geq 0$

Список литературы

1. Баранов И.А. Применение признака постоянства функции к решению некоторых задач / И.А. Баранов, Г.А. Ястребинецкий // Математика в школе. – 1980. – № 5. – С. 21–24.
2. Барчунова Ф.М. Применение свойств функций при решении уравнений / Ф.М. Барчунова, Л.О. Денищева // Математика в школе. – 1992. – № 6. – С. 11.
3. Бейсеков Ж.Б. Функциональный подход к доказательству тождеств / Ж.Б. Бейсеков, А.И. Мостовой // Математика в школе. – 1977. – № 3. – С. 54.
4. Куваев М. К вопросу о графическом решении уравнений // Математика в школе. – 1984. – № 6. – С. 57–58.
5. Кудреватов Г.А. К применению графиков при исследовании уравнений // Математика в школе. – 1968. – № 2.
6. Кузнецова Г.Б. Графическое решение некоторых алгебраических уравнений / Г.Б. Кузнецова, З.А. Скопец // Математика в школе. – 1973. – № 6. – С. 73–76.
7. Муравьев Е.С. Функции. Уравнения и неравенства / Е.С. Муравьев, В.В. Орлов, В.П. Радченко. – СПб.: Образование, 1993. – 88 с.
8. Никулин Н.А. О графическом решении некоторых алгебраических уравнений / Н.А. Никулин, О.Н. Колесников, Л.П. Банникова // Математика в школе. – 1982. – № 1. – С. 55–56.
9. Шунда Н.Н. Об использовании свойств функций при решении уравнений и неравенств // Математика в школе. – 1970. – № 3. – С. 61–64.

Профессиональный конкурс учителей математики «Информационно-компьютерные технологии в обучении математике» как ресурс повышения качества образования

Не секрет, что для появления устойчивого интереса учащихся к математике необходимо использование на уроках математики в современной школе интерактивных досок, компьютеров, мультимедиа.

В 2016 учебном году в 6 раз для учителей математики Ленинградской области проводился конкурс методических разработок «Информационно-компьютерные технологии в обучении математике».

Целью конкурса является выявление учителей математики, активно, успешно и эффективно использующих информационно-компьютерные технологии (далее ИКТ) в профессиональной деятельности, а также дальнейшее распространение ИКТ в обучении школьной математике в образовательных учреждениях Ленинградской области.

Конкурс проводился среди учителей математики школ, гимназий, лицеев и учреждений начального и среднего профессионального образования Ленинградской области.

При определении победителей конкурса жюри в первую очередь оценивало методический аспект представленных конкурсантом материалов.

Учителями математики – участниками конкурса были представлены разработки уроков и внеклассного мероприятия.

Так, учитель математики и информатики МБОУ «Коммунарской средней общеобразовательной школы №3» Горюшина Ирина Васильевна представила разработку урока для учащихся 6 класса «Математический турнир», главная цель которого прививать интерес к предмету, используя технологию дидактической игры.



Цели урока:

- прививать интерес к предмету, используя игру.

Задачи:

- образовательные:**
 - закрепление умений навыков решения нестандартных задач;
- воспитательные:**
 - развивать умение выслушивать ответы одноклассников;
 - прививать интерес к предмету.
- развивающие:**
 - развивать мыслительные операции (проведение аналогии, анализ, синтез);
 - развивать логическое мышление.

Среди представленных уроков в номинации «Современный урок математики в свете внедрения ФГОС» следует отметить разработку Федосеевой Ирины Николаевны, учителя математики МОУ «Раздольская средняя общеобразовательная школа» Приозерского района. Тема урока – «Пирамида и ее свойства (базовый уровень)». Это комбинированный урок с элементами исследовательской деятельности с использованием ИКТ. Учитель поставил следующие цели: организовать деятельность учащихся по восприятию, осмыслению и закреплению знаний учащихся о пирамиде и ее свойствах, формулах для нахождения площади поверхности пирамиды; организовать исследовательскую деятельность для приобретения нового знания, сравнения полученных результатов, формулировки выводов; продолжить формирование универсальных учебных действий.

Переход на федеральные государственные образовательные стандарты второго поколения меняет ориентацию педагогов в характере образования – в его направленности, целях, содержании на выявление и развитие творческих способностей учащихся, на инициативу, самостоятельность обучающихся, конкурентоспособность и мобильность будущих выпускников.

В образовательных учреждениях должно произойти изменение отношения к преподаванию курса геометрии в основной и старшей школах, это предмет, по которому предстоит государственный экзамен за курс основной и средней школы. Учащиеся должны не только овладеть теоретическими фактами курса, но и

уметь проводить обоснованные решения геометрических задач и математически грамотно их записывать.

В представленном уроке геометрии обобщаются основные знания об элементах пирамиды. Вводится понятие правильной пирамиды и, наряду с этим, рассматриваются свойства пирамид, у которых высота падает в центр вписанной или описанной окружности. На уроке учащиеся получают опыт работы в группах, поиска нужной информации, отрабатывают предметные навыки, осваивают, какие формулы надо использовать при решении задач. Презентация урока может быть успешно использована и при изучении темы «Объем пирамиды» в 11 классе.

Технологическая карта урока (фрагмент)

Организационная информация	
Предмет	Геометрия
Класс	10
Тема	«Пирамида и её свойства»
Автор урока	Федосеева Ирина Николаевна, учитель математики
Образовательное учреждение	Муниципальное образовательное учреждение «Раздольская средняя общеобразовательная школа» Приозерского района Ленинградской обл.
Город/поселение	П. Раздолье Приозерского района Ленинградской обл.
Описание урока	
Тип урока	Комбинированный, с использованием ИКТ
Время реализации урока	45 мин
Цели и задачи урока	Актуализация и обобщение темы «Пирамида и её свойства». Цели и задачи: • <i>образовательные:</i> – актуализировать и обобщить знания учащихся о пирамиде; – повторить понятие пирамиды и её элементов; – повторить площадь поверхности пирамиды, некоторые сведения из планиметрии; – познакомить с ключевыми задачами, связанными с пирамидами; интересными научными фактами о пирамиде;

	• <i>развивающие:</i> – продолжить формирование навыков: предметных и метапредметных умений, применения на практике знаний и рефлексии своих действий; – поддержать познавательную активность учащихся; – развивать эмоции учащихся, создав на уроке ситуацию занимательности; – учить дискуссии; – формировать информационно-интеллектуальную компетентность; – установить связь темы с окружающим миром, её полезность на практике; • <i>воспитательные:</i> – обеспечить реализацию личностных умений; – формировать УУ действия учащихся; – продолжить воспитание взаимопомощи, любознательности, интереса к предмету и окружающему миру
Планируемые результаты	<i>Предметные:</i> • Знать: определение и свойства пирамиды; определение правильной пирамиды; формулы площади поверхности пирамиды; расположение центра описанной (вписанной) около правильного n-угольника окружности; свойства пирамиды, в которой высота падает в центр описанной окружности; свойства пирамиды, в которой высота падает в центр вписанной окружности. • Уметь: изображать пирамиду; применять свойства при решении задач; доказывать свойства пирамиды; находить площадь поверхности пирамиды; решать простейшие задачи по теме. <i>Личностные:</i> развитие самоуважения и способности адекватно оценивать себя и свои достижения; установление личностного смысла (т. е. «значения для себя») учения; понимание границ того, «что я знаю», и того, «что я не знаю»; осознание и ориентация на основные моральные нормы их выполнения. <i>Метапредметные:</i> навыки создания презентаций и представление их в коллективе; применение в окру-

	жающем мире понятий урока; профессиональная ориентация
УУД	<i>Личностные УУД:</i> • адекватная самооценка; • рефлексия; • сформированная учебная мотивация; • адекватная оценка других; • критическое отношение к информации и избирательность её восприятия; • уважение к информации о частной жизни и информационным результатам других людей. <i>Регулятивные УУД:</i> • планирование действия; • контроль выполнения; • внесение исправления; • оценивание, проявляя волевую саморегуляцию и обеспечение управления познавательной и учебной деятельностью. <i>Коммуникативные УУД:</i> • планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками; • умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли; • умение слушать собеседника. <i>Познавательные УУД:</i> • поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств; • выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; • рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности; • моделирование, преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область; • анализ, синтез, выбор оснований и критериев для сравнения, классификации объектов; • построение логической цепи рассуждений; • самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера

Содействие в реализации ФГОС:

1. Подготовка к уроку.

Вовлечение в проектную деятельность и создание докладов, презентаций к уроку учащимися. Совместное целеполагание урока. Выбор эпиграфа урока. Создание условий для творчества и самовыражения.

2. На уроке.

Совместное название и целеполагание урока. Наглядность и доступность материала при помощи презентации к уроку, созданной учителем. Проблемная постановка вопроса в задачах, стимулирующая познавательную активность, самопознание, продолжающую системность обучения предмету. Различные виды и формы работы формируют познавательный интерес к данному уроку и геометрии в целом. Возможность дифференцированного подхода и выставление отметок каждому ученику за урок. Работа в группах. Воспитание толерантности к одноклассникам. Постоянный диалог учителя с классом, создание дружелюбной околопредметной среды восприятия математического содержания. Стимулирование к самостоятельным суждениям проблемными вопросами. Здоровьесберегающие технологии: физкультминутка, проветривание перед уроком. Создание связи с окружающим миром. Формирование толерантного отношения к одноклассникам, учителю, себе и геометрии.

3. После урока.

Продолжение самостоятельной деятельности по решению домашнего задания. Формирование УУД на каждом этапе.

Дополнительная информация:

Ресурсы, оборудование и материалы	Необходимое техническое оборудование: компьютер, мультимедиа проектор, экран, презентация к уроку учителя, 1 доклад учащихся – презентации, карточки с заданиями, решения классных и домашних задач.
Используемые педагогические технологии, методы и приемы	ИКТ, мультимедиа технологии, проблемное обучение, развивающее обучение, метод проектов, дифференцированный и разноуровневый подход к обучению, работа в группах – технология сотрудничества, развитие критического мышления, личностно-ориентированный подход к обучению, здоровьесберегающие технологии.
Учебное пособие	«Геометрия 10–11». Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 18-е изд. М.: Просвещение, 2012.
Ссылки на использованные интернет-ресурсы	• https://ru.wikipedia.org • http://uztest.nl/abstracts/7idabstract=-49 • http://www.fmclass.ru/math.DhD?id=48626399be5d8 • Картинки и материалы открытого пользования Интернет

Важной целью обучения является знакомство учащихся с математикой как с общекультурной ценностью, выработка понимания ими того, что математика для школьника является инструментом познания окружающего мира и самого себя. Достойно высокой оценки такое обучение математике, когда преподающему ее учителю удается, используя возрастные особенности учащихся, превратить математику в одно из средств самутверждения ученика.

Следующий урок в номинации «Современный урок математики в свете внедрения ФГОС» представлен Шумиловой Натальей Ивановной, учителем математики МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 4» г. Приозерска.

Это разработка комбинированного урока – урока обобщения и диагностики знаний учащихся: прослеживается умение учащихся решать неравенства и применять полученные знания в нестандартной ситуации для решения других задач. Учащиеся уже умеют находить корни квадратного трехчлена, решая квадратные уравнения разными способами, а также знают, как по-

строить график квадратичной функции, и умеют определять промежутки знакопостоянства.

По программе на изучение темы «Решение неравенств второй степени с одной переменной» отводится 7 часов, в том числе на решение неравенств с помощью графика квадратичной функции отводится 3 урока.

Решение неравенств второй степени – одна из центральных тем курса алгебры. Большинство ошибок при решении задания №15 профильного уровня ЕГЭ как раз связаны с непониманием и неумением решать именно квадратные неравенства. В 10 и 11 классах решение многих иррациональных, показательных, логарифмических неравенств сводится к решению неравенств второй степени. Поэтому тщательное изучение данного материала крайне актуально.

Учителем были поставлены предметные, метапредметные и личностные задачи урока.

Ход урока

Время	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
Мотивационно-ориентировочный этап (быстро включить учащихся в деловой ритм)		
2 мин	– Наш урок я хочу начать со слов персидско-таджикского поэта Рудаки: <i>С тех пор как существует мирозданье, Такого нет, кто б не нуждался в знанье. Какой мы ни возьмём язык и век, Всегда стремится к знанью человек.</i> – Сегодня нам с вами предстоит открыть новые знания. Каждый этап работы на уроке заносится в оценочный лист (оценочный лист и критерии – на столе). – Прежде чем совершить открытие, давайте проверим, готовы ли мы совершить его, достаточно ли хорошо знаем необходимый для работы на уроке материал. Для этого проведём разминку по изученному материалу (в форме самостоятельной работы)	Слушают учителя

Актуализация знаний (учитель комментирует задание, следит за временем)														
10 мин	Слайд № 3 Самостоятельная работа на два варианта, выполняется под копирку: 1. Повторение способов нахождения корней квадратного трехчлена. 2. Повторение расположения графика квадратичной функции в зависимости от старшего коэффициента и числа корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. 3. Повторение нахождения промежутков знакопостоянства функции. Слайд № 4 Найдите корни квадратного трехчлена <table border="1"> <thead> <tr> <th>I вариант</th><th>II вариант</th><th>№1</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1) $2x^2 - 5x + 3$</td><td>1) $x^2 - 4x + 4$</td><td></td></tr> <tr> <td>2) $9x^2 + 6x + 1$</td><td>2) $3x^2 + 5x + 2$</td><td></td></tr> <tr> <td>3) $6x^2 - 13x + 6$</td><td>3) $3x^2 - 10x + 3$</td><td></td></tr> </tbody> </table> Слайд № 5 Найдите число корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и знак коэффициента a по рисунку. I вариант 1) 2) 3) II вариант 1) 2) 3)	I вариант	II вариант	№1	1) $2x^2 - 5x + 3$	1) $x^2 - 4x + 4$		2) $9x^2 + 6x + 1$	2) $3x^2 + 5x + 2$		3) $6x^2 - 13x + 6$	3) $3x^2 - 10x + 3$		Выполняют самостоятельную работу, задания № 1–№ 3 под копирку
I вариант	II вариант	№1												
1) $2x^2 - 5x + 3$	1) $x^2 - 4x + 4$													
2) $9x^2 + 6x + 1$	2) $3x^2 + 5x + 2$													
3) $6x^2 - 13x + 6$	3) $3x^2 - 10x + 3$													

	Слайд № 6 Найдите промежутки знакопостоянства I вариант 1) 2) 3) II вариант 1) 2) 3)																															
	Забирает один экземпляр работы, второй оставляет ученикам для проверки, отвечает на вопросы учащихся. Слайд № 7 Проверь себя <table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th>I вариант</th><th>II вариант</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>№1</td><td>1) $x_1 = 1, x_2 = 1.5$</td><td>1) $x_1 = 2$</td></tr> <tr> <td></td><td>2) $x_1 = -1/3$</td><td>2) $x_1 = -1, x_2 = -2/3$</td></tr> <tr> <td></td><td>3) $x_1 = 1.5, x_2 = 2/3$</td><td>3) $x_1 = 3, x_2 = 1/3$</td></tr> <tr> <td>№2</td><td>1) 2 корня, $a > 0$</td><td>1) нет корней, $a < 0$</td></tr> <tr> <td></td><td>2) нет корней, $a > 0$</td><td>2) 1 корень, $a > 0$</td></tr> <tr> <td></td><td>3) 1 корень, $a < 0$</td><td>3) 2 корня, $a < 0$</td></tr> <tr> <td>№3</td><td>1) $y > 0$ на пр-ках $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$</td><td>1) $y > 0$ на пр-ке $(-\infty; +\infty)$</td></tr> <tr> <td></td><td>2) $y < 0$ на пр-ке $(-\infty; +\infty)$</td><td>2) $y > 0$ на пр-ках $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$; $y < 0$ на пр-ке $(-3; -1)$</td></tr> <tr> <td></td><td>3) $y > 0$ на пр-ке $(-2; 2)$; $y < 0$ на пр-ках $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$</td><td>3) $y < 0$ на пр-ках $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$</td></tr> </tbody> </table>		I вариант	II вариант	№1	1) $x_1 = 1, x_2 = 1.5$	1) $x_1 = 2$		2) $x_1 = -1/3$	2) $x_1 = -1, x_2 = -2/3$		3) $x_1 = 1.5, x_2 = 2/3$	3) $x_1 = 3, x_2 = 1/3$	№2	1) 2 корня, $a > 0$	1) нет корней, $a < 0$		2) нет корней, $a > 0$	2) 1 корень, $a > 0$		3) 1 корень, $a < 0$	3) 2 корня, $a < 0$	№3	1) $y > 0$ на пр-ках $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	1) $y > 0$ на пр-ке $(-\infty; +\infty)$		2) $y < 0$ на пр-ке $(-\infty; +\infty)$	2) $y > 0$ на пр-ках $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$; $y < 0$ на пр-ке $(-3; -1)$		3) $y > 0$ на пр-ке $(-2; 2)$; $y < 0$ на пр-ках $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	3) $y < 0$ на пр-ках $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$	Сдают один экземпляр работы, второй оставляют себе. Сверяют ответы на слайде презентации, исправляют ошибки
	I вариант	II вариант																														
№1	1) $x_1 = 1, x_2 = 1.5$	1) $x_1 = 2$																														
	2) $x_1 = -1/3$	2) $x_1 = -1, x_2 = -2/3$																														
	3) $x_1 = 1.5, x_2 = 2/3$	3) $x_1 = 3, x_2 = 1/3$																														
№2	1) 2 корня, $a > 0$	1) нет корней, $a < 0$																														
	2) нет корней, $a > 0$	2) 1 корень, $a > 0$																														
	3) 1 корень, $a < 0$	3) 2 корня, $a < 0$																														
№3	1) $y > 0$ на пр-ках $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	1) $y > 0$ на пр-ке $(-\infty; +\infty)$																														
	2) $y < 0$ на пр-ке $(-\infty; +\infty)$	2) $y > 0$ на пр-ках $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$; $y < 0$ на пр-ке $(-3; -1)$																														
	3) $y > 0$ на пр-ке $(-2; 2)$; $y < 0$ на пр-ках $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	3) $y < 0$ на пр-ках $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$																														
2 мин	– Мы повторили необходимый материал, разобрались в своих ошибках. Подведем итог самостоятельной работы. Заполним оценочный лист	Выставляют оценки в оценочные листы																														

Следующий урок, который был представлен на конкурс ИКТ, – урок для 7 класса «Бенефис линейной функции». Разра-

ботала его учитель математики МОУ «Сланцевская средняя общеобразовательная школа №6» Руденко Ольга Павловна.

Цель урока: систематизировать знания учащихся по теме «Линейная функция, ее свойства и график», выявить уровень, которого достиг обучающийся в умении находить факты, представленные в явном виде. Составлять уравнения прямых, а также сопоставлять представленные уравнения с изображениями линейных функций.

Учителем применяются различные формы заданий. В результате обеспечивается разнообразие формулировок условий заданий и учащиеся привыкают к пониманию сути задания, которая может выражаться по-разному.

В процессе урока происходит совершенствование методического инструментария. Так, например, учителем используются математические задачи не только как средство отработки технических приемов и алгоритмов, но и как средство формирования и развития интеллектуальных качеств мышления учащихся.

На уроке учителем успешно применяются игровые технологии. Следует отметить, что именно они способствуют привитию устойчивого интереса к предмету алгебра и, непосредственно, к одной из важнейших тем этого предмета – линейной функции.

Учителем выбраны наиболее эффективные приемы, которые мотивируют учащихся к развитию и дальнейшему продвижению в познании. На уроке отслеживается индивидуальный прогресс учащихся в изучении данной темы. Приведем фрагмент данного урока.

Полная информация о данном уроке, а также о других, представленных на конкурс уроках, выложена на сайте кафедры математики, информатики и ИКТ ЛОИРО.

Оптимизация образовательного процесса в школе состоит в грамотном сочетании традиционных, хорошо зарекомендовавших себя технологий обучения и современных педагогических технологий, образовательных ресурсов и требований к планируемым результатам.

Алгебра 7 класс
Беседа о линейной функции
(урок-игра)

Правила игры

- Класс делится на три команды;
- Отвечая на вопрос, участник поднимает таблицу с номером правильного ответа;
- За правильный ответ команда получает 5 баллов

Первый тур

Задание №1
График какой функции лишней?

Задание №2
На каком рисунке изображен график линейной функции $y = kx$? Ответ объяснить.

Задание №3
На каком рисунке коэффициент k в уравнении линейной функции отрицателен?

Уместно вспомнить высказывание А. Дистервега: «Плохой учитель подает истину, хороший – учит ее находить».

Постепенно изменяющаяся методика обучения должна развивать у учащихся навыки организации умственного труда и самообразования.

Держать руку на пульсе времени – позиция современного педагога-профессионала.

Урок математики и реализация ФГОС

Любой учитель, желающий получить реальные и положительные результаты своего труда, занят анализом, поиском и воплощением в жизнь интересных находок и инноваций (необязательно исключительно новых элементов, но «новых» с точки зрения их применения в новых условиях).

А каковы эти новые условия для учителя математики? Так получается, что внешних сложностей и противоречий можно обнаружить достаточно: значительное увеличение объема содержания обучения, сокращение учебного времени на его усвоение учащимися, обязательная итоговая аттестация по математике, чрезвычайное переполнение образовательного пространства информацией, подчас избыточной, и многое другое. И только осмысленный подход и качественный анализ методического потенциала обучения математике позволяет учителю выделить те элементы образовательного процесса, которые несомненно и немедленно будут способствовать эффективному обучению.

Отметим, что законом «Об образовании в РФ» с учетом возможностей и потребностей личности допускается выбор и сочетание различных форм получения образования: в образовательном учреждении, в форме семейного образования, самообразования, экстерната, причем образовательные стандарты второго поколения расширяют формы получения образования в рамках образовательного учреждения, предусматривая наряду с традиционными занятиями на уроках также внеурочную деятельность. Однако классно-урочная система, в течение нескольких столетий являющаяся самой распространенной формой обучения получения образования, сохраняет свои позиции и в настоящее время, главным образом вследствие простой организационной структуры и экономичности. Таким образом, основной формой организации учебно-воспитательной работы с учащимися в школе остается урок. **Урок** – логически законченный, целостный, ограниченный определенными рамками времени отрезок учебно-воспитательного процесса, где представлены все

основные элементы этого процесса (цели, содержание, средства, методы, формы организации). Урок – это не самоцель, это инструмент воспитания и развития личности. Современный урок – это урок, на котором учитель умело использует все методические возможности для развития личности ученика, ее активного умственного роста, глубокого и осмысленного усвоения знаний, для формирования ее нравственных основ [1].

Новые требования к результатам образовательной деятельности требуют определенных изменений в содержании и организации процесса обучения (см. табл.).

Таблица

Основание для сравнения	Инновационные изменения в обучении	
	ФГОС I поколения	ФГОС II поколения
Цель обучения	Преподнесение (передача) учителем учащимся знаний	Выработка определенных решений в ходе активного (совместного) обсуждения проблем
Содержание обучения	Освоение отдельных учебных предметов	Полидисциплинарное (межпредметное) изучение сложных (жизненных) ситуаций
Роль участников образовательного процесса	Руководящая роль учителя в организации обучения	Сотрудничество учителя и обучающихся в ходе овладения знаниями
Целостность процесса обучения	Отсутствие целостности организации учебной деятельности учащегося в урочное и внеурочное время, в рамках различных предметов	Целенаправленная организация учебной деятельности учащегося в школе в урочное и внеурочное время
Вариативность обучения	Жестко установленные методы, технологии и содержание обучения	Активное участие учителя и обучающихся в выборе содержания (в рамках образовательных стандартов), методов и технологий обучения
Основная формула результата образования	«Знаю, что»	«Знаю, как»
Доминирующий компонент процесса	Контроль	Практика и самостоятельная деятельность
Характер контроля	Статистические методы оценки учебных достижений	Комплексная отметка учебных достижений

Проанализируем, какие основания для конструирования современного урока дает нам ФГОС второго поколения.

Урок математики в силу его особенностей, таких как предметность, неразрывная связь теории и практики, вариативное обучение, обеспечение гигиенических условий урока, имидж учителя, деятельность на результат и др., обладает существенным потенциалом в реализации идей ФГОС. Для достижения целей общеинтеллектуального и общекультурного развития учащихся в свете новых образовательных стандартов основного общего образования большое значение имеют содержание обучения, образовательные технологии, используемые учителем, и формы организации урока математики.

Рассмотрим некоторые примеры использования элементов урока математики как инструмента реализации идей ФГОС.

• Элементы истории математики

Использование элементов истории математики позволяет включить учащихся в поиск новых смыслов и альтернативных интерпретаций изучаемого математического материала, увидеть значения изучаемых понятий, увидеть данное понятие в связи с другими, научить школьников быть толерантными к иному мнению, адекватно принимать различные способы рассуждений, что создает условия для обогащения различных форм умственного опыта учащихся. На первый взгляд кажется трудным найти на уроке время, необходимое для ознакомления с историческим материалом. Однако вопрос о формах использования элементов истории математики на уроках почти полностью подчинен главному вопросу – связи изучаемой в школе математики с историей. Какая бы ни была форма сообщения исторических фактов: краткая беседа, экскурс, лаконичная справка, решение задачи, показ и разъяснение рисунка, – использованное время нельзя считать потерянным напрасно, если учитель сумел преподнести исторический факт в тесной связи с изучаемым на уроке теоретическим материалом.

Вот пример задачи [2]:

В XV в. суммарная площадь Пскова, Великого Новгорода и Нижнего Новгорода была 940 га, из которых $\frac{11}{47}$ составляла

площадь Пскова. Вычислите площадь каждого из этих трех городов, если известно, что Нижний имел площадь на 100 га меньше, чем Новгород Великий. (Задача на нахождение числа по величине его процента).

• Работа с информацией

Обучение больше не заключается в том, что ученик получает от учителя некую информацию и осваивает ее. ФГОС делает попытку выйти из ловушки «специализации», в которой оказалось математическое образование. Чем лучше учитель учит детей решать конкретные уравнения, чем больше дает им технических умений, тем труднее им решать задачи нестандартные и новые. Ученики пасуют перед новым. Эту проблему можно решить, если формировать универсальные учебные действия. В настоящее время все более актуальным в образовательном процессе становится использование в обучении приемов и методов, которые формируют умения самостоятельно добывать знания, собирать необходимую информацию, выдвигать гипотезы, делать выводы и умозаключения. Умение работать с информацией становится одним из ведущих в свете достижения метапредметных результатов.

Приведем пример задач, решение которых основано на умении считывать информацию с диаграмм, графиков и таблиц:

На диаграмме показано количество sms, присланных слушателями за каждый час 4-часового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообщений было прислано за последние два часа программы по сравнению с первыми двумя часами этой программы.



Другой пример работы с информацией – выдержки из текстов популярной литературы.

Эсхил	Древнегреч. драматург	525 до н. э. – 456 до н. э.	Премудрость чисел, из наук главнейшую, Я для людей измыслил.
Платон	Философ	427 до н. э. – 347	Разве ты не заметил, что способный к математике изощрен во всех науках в природе?
Роджер Бэкон	Ученый, доктор	1214– 292	В истории черпаем мы мудрость, в поэзии – остроумие, в математике – проницательность.
Иммануил Кант	Представитель немецкой философии	1724–1804	В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики.
Иоганн Вольфганг Гёте	Крупнейший поэт и гений немецкой литературы	1749–1832	Математики – вроде французов: когда говоришь с ними, они переводят твои слова на свой язык и сразу получается что-то совсем другое.
Нильс Хенрик Абель	Норвежский математик	1802– 1829	Математика для учёного – то же самое, что скальпель для анатома.
Пафнутий Львович Чебышев	Математик, механик	1821–1894	Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание, в настоящее время они получили еще больше интереса по влиянию своему на искусство и промышленность.
Джонатан Свифт «Путешествия Гулливера по многим отдаленным странам». Огромное количество задач мы находим на страницах книги «Путешествия Гулливера», где описаны необычайные приключения в стране лилипутов и великанов. В стране лилипутов размеры: высота, ширина, длина, толщина всех вещей, людей, животных, растений и т. д. – в 12 раз меньше, чем у нас. А в стране великанов в 12 раз больше.			

Лилипуты, читаем мы в книге, установили для Гулливера следующую норму отпуска продуктов: «...Ему будет ежедневно выдаваться столько съестных припасов и напитков, сколько достаточно для прокормления 1724 подданных страны лилипутов». Из какого расчета получили лилипуты такой огромный паек, ведь Гулливер только лишь в 12 раз больше лилипута?

Расчет на самом деле сделан верно, если не считать маленькой арифметической ошибки. Не надо забывать, что лилипуты – это уменьшенная точная копия обыкновенного человека и имеет нормальную пропорцию частей тела. Значит, они не только в 12 раз ниже, но и в 12 раз уже и в 12 раз тоньше Гулливера. Получается, что объем тела Гулливера не в 12 раз, а в $12 \times 12 \times 12 = 1728$ раз больше лилипута. Именно поэтому ему понадобится такое количество еды.

Особое место на уроках математики занимает текстовая информация в научном стиле. Научный стиль — функциональный стиль речи литературного языка, которому присущ ряд особенностей: предварительное обдумывание высказывания, монологический характер, строгий отбор языковых средств, тяготение к нормированной речи. Целями научного сообщения являются: по возможности точное и полное объяснение фактов, демонстрация причинно-следственных связей между явлениями, выявление закономерности исторического развития и так далее.

• Практико-ориентированные задачи

Огромное значение имеют задачи с практическим содержанием, которые целесообразно использовать в процессе обучения для раскрытия многообразия применения математики в жизни, своеобразия отражения ею реального мира и достижения дидактических целей, таких как:

- мотивация введения новых математических понятий и методов;
- иллюстрация учебного материала;
- закрепление и углубление знаний по предмету;
- формирование практических умений и навыков.

• Образовательные технологии

Мы выявили, что для урока математики наиболее эффективными в реализации идей ФГОС считаются следующие технологии:

- проблемное обучение;
- развивающее обучение;
- проектное обучение;
- дидактическая игра;
- педагогические мастерские;
- технология развития критического мышления;
- технология портфолио;
- здоровьесозидание;
- информационно-коммуникационные технологии.

Данные технологии основаны на следующих принципах педагогической техники:

- свобода выбора (в любом обучающем или управляющем действии ученику предоставляется право выбора);
- открытость (не только давать знания, но и показывать их границы, сталкивать ученика с проблемами, решения которых лежат за пределами изучаемого курса);
- деятельность (освоение учениками знаний, умений, навыков преимущественно в форме деятельности, ученик должен уметь использовать свои знания);
- результативность (высокий КПД, максимально использовать возможности, знания, интересы самих учащихся);
- обратная связь (регулярно контролировать процесс обучения с помощью развитой системы приемов обратной связи).

При применении различных технологий важно, чтобы учитель не искажал технологию, используя из нее только отдельные приемы.

• Формы организации урока математики

Среди различных форм работы на уроке математики следует особенно выделить чрезвычайную полезность устных упражнений.

Устные упражнения содержат огромные потенциальные возможности для активизации познавательной деятельности

учащихся. Во время выполнения устных упражнений активизируется мыслительная деятельность учащихся, развиваются память, речь, внимание, способность воспринимать сказанное на слух, быстрота реакции, наряду с этим развивается и гибкость мышления. Эти функции устных упражнений тесно связывают их с теорией развивающего обучения, которая определяет основную цель обучения как развитие интеллектуальных способностей учащихся. В частности, в качестве одного из средств развивающего обучения предлагается система устных упражнений.

В заключение выделим *основные пути совершенствования урока математики в современной школе*:

- *Усиление целенаправленности деятельности учителя и учащихся на уроке*: мотивация учащихся на выполнение поставленных задач, достижение целей непосредственно на уроке.

- *Осуществление четкой организации каждого урока от первой до последней минуты*: планирование каждого урока таким образом, чтобы в нем были предусмотрены самые короткие пути, ведущие к поставленной цели.

- *Повышение познавательной самостоятельности и творческой активности учащихся*: применение на уроке методов и приемов проблемного обучения; организация самостоятельной работы учащихся с различными источниками информации.

- *Интенсификация учебно-воспитательного процесса на уроке*. Степень интенсивности учебного труда зависит от эффективности использования каждой минуты урока, мастерства учителя, подготовки учащихся, организованности классного коллектива, наличия необходимого оборудования и т. п. В то же время не следует понимать под интенсификацией стремление решить как можно больше задач, выполнить как можно больше различных упражнений. В математике, как ни в каком другом предмете, важно не количество, а качество.

- *Совершенствование типологии и структуры урока*. Использование в работе современных образовательных технологий позволяет учителю конструировать самые разнообразные по типу и структурным элементам уроки.

Заключение

Безусловно, можно привести еще целый ряд конкретных примеров, подтверждающих богатый потенциал урока математики в обучении, формировании, развитии и воспитании современного человека. В самом содержании математики заложен инструмент этого обучения и развития.

Новизна современного российского образования требует личностного начала учителя, которое позволяет ему либо «урочить», наполняя учеников знаниями, умениями и навыками, либо обучать, развивая понимание этих знаний, умений, навыков, создавая условия для порождения их ценностей и смыслов.

Основным критерием качества современного урока математики должен стать ответ на вопрос: как учитель на уроке помогает ученику учиться? (Т. е. учить себя). Неоспоримо одно: урок должен быть одушевленным личностью учителя. Это и есть главный ресурс, без которого новые требования ФГОС не будут реализованы.

Список литературы

1. Лукичева Е.Ю. ФГОС: обновление содержания технологий обучения (математика): учеб.-метод. пособие. – СПб.: СПб АППО, 2013.
2. Перли С.С. Страницы русской истории на уроках математики: нетрадиционный задачник: 5–6 класс / С.С. Перли, Б.С. Перли. – М.: Педагогика-Пресс, 1994.

Эффективное внедрение образовательных инноваций невозможно без координации усилий всех участников образовательного процесса, однако главным проводником на первом этапе является все же учитель. От того, насколько быстро учитель-предметник «включится» в обновление образовательного пространства, насколько ему будут понятны суть и предполагаемые результаты нововведений, средства и пути достижения результатов, зависит качество образования в целом.

В этой связи встает необходимость разработки научно-методического сопровождения учителя современной школы по всем направлениям его деятельности. В данном пособии представлены несколько примеров сопровождения учителя математики в процессе обучения школьников математике, впереди и другие успешные практики работы педагогов.

При реализации «Концепции развития математического образования в РФ» востребованным является опыт лидеров математического образования. Для выявления и распространения этого опыта уже сегодня организуются и проводятся олимпиады и иные конкурсные мероприятия для учителей; создается открытый банк видеолекций учителей математики; активно создаются профессиональные ассоциации, интернет-сообщества, обеспечивающие распространение инновационных технологий в области математики; создаются общедоступные федеральные базы данных по образовательным программам математической направленности (профиля); распространены успешные практики дополнительного образования (в том числе кружков), направленных на развитие математических способностей обучающихся, и т. д.

Указанные направления дают представление учителям о содержании и способах совершенствования собственной профессиональной деятельности, а руководителям образовательных организаций – о показателях эффективности этой деятельности.

Сведения об авторах

Голубева Светлана Александровна, старший преподаватель кафедры математики, информатики и ИКТ ЛОИРО.

Громова Жанна Владимировна, учитель математики МОУ «СОШ с углубленным изучением отдельных предметов» г. Всеволожска.

Ингинен Ольга Вячеславовна, учитель математики МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 6 им. Героя Советского Союза В.П. Грицкова» г. Луги, руководитель районного методического объединения учителей математики.

Крымцова Елена Михайловна, учитель математики МОУ Лицей №1 г. Всеволожска.

Лукичева Елена Юрьевна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики и ИКТ ЛОИРО.

Радченко Валерий Павлович, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики и ИКТ ЛОИРО.

Рязанова Елена Владимировна, учитель математики МОУ Лицей №1 г. Всеволожска.

Титяк Марина Федоровна, учитель математики МКОУ «Фёдоровская СОШ», руководитель РМО учителей математики.

Федулов Сергей Евгеньевич, учитель математики МОУ Лицей № 1 г. Всеволожска.

Методическое сопровождение учителя математики современной школы: опыт Ленинградской области

Методическое пособие

Редактор *Е. В. Романова*
Технический редактор *Л. Н. Ефимова*

Подписано в печать 28.02.2017. Формат 60×84 ¹/₁₆
Усл. печ. л. 7,44. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная
Тираж 200 экз. Заказ 416

Ленинградский областной институт развития образования
197136, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 25-а